



漫谈 拓扑学

从欧拉谈起

报告人：方复全

目录

CONTENTS

01 拓扑的起源

02 拓扑的内涵—几个例子

03 拓扑与其他学科的交叉

04 从组合拓扑到代数拓扑

05 从微分拓扑到几何拓扑

06 中国拓扑学家的若干贡献

01

拓扑的起源

拓扑学的起源：柯尼斯堡七桥问题（1736）

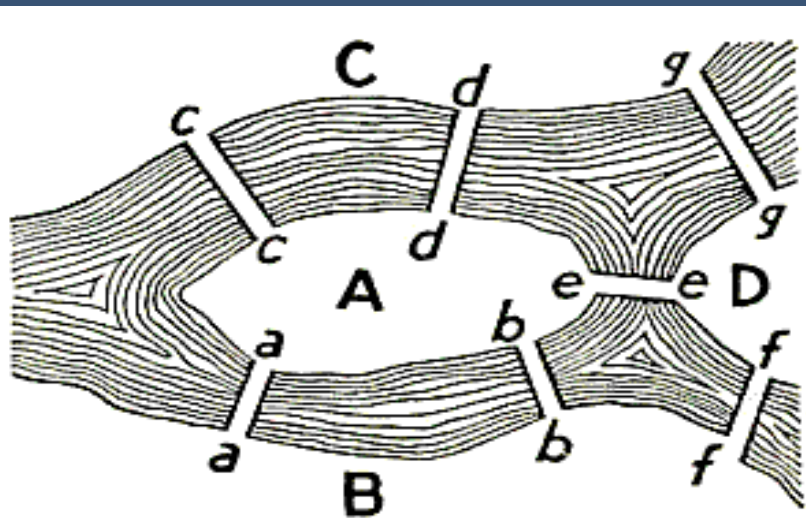


FIGURE 98. Geographic Map:
The Königsberg Bridges.

拓扑学起初叫**位置分析学**，这是**莱布尼茨**1679年提出的名词。最早的、有代表性的拓扑问题可以追溯到下面的：**柯尼斯堡的七桥问题**（一笔画问题）

柯尼斯堡是东普鲁士首府，普莱格尔河横贯其中，上有七座桥（见图）。



一个散步者怎样才能走遍七座桥而每座桥只经过一次？

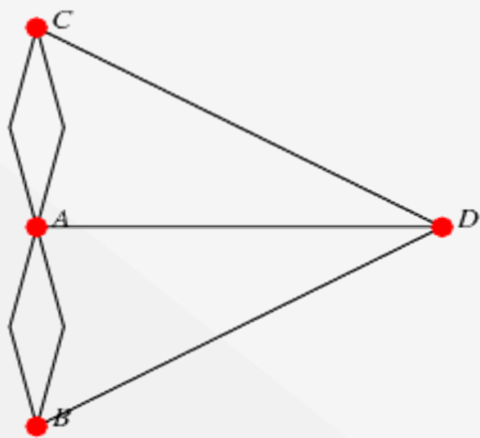
拓扑学的起源：柯尼斯堡七桥问题（1736）



欧拉

(1707–1783)

瑞士数学家、科学家



这个18世纪的智力游戏, 在1736年被**欧拉**简化为用细线画出的网络能否一笔画出的问题, 然后他证明: 可以一笔画出的充要条件是:

“奇数顶点的个数要么是0、要么是2”。

结论: 一个网络能否一笔画出, 与线条的长短曲直无关, 只决定于其中的点与线的连接方式。

拓扑学的起源：欧拉的多面体公式（1750）

欧拉的多面体公式

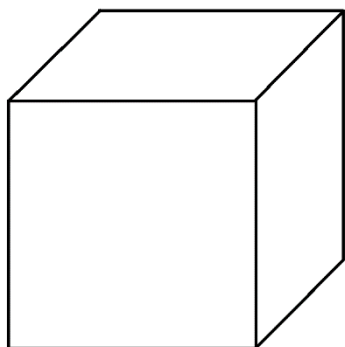
欧拉发现，不论什么形状的凸多面体，其顶点数 v 、棱数 e 、面数 f 之间总有

$$v - e + f = 2$$

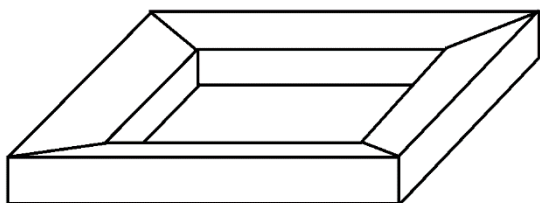
由此可以证明，正多面体只有五种。



拓扑学的起源：欧拉的多面体公式（1750）



$$v - e + f = 8 - 12 + 6 = 2$$



$$v - e + f = 16 - 32 + 16 = 0$$

值得注意的是，如果多面体不是凸的而呈框形，也不管框的形状如何，总有

$$v - e + f = 0$$

这说明，凸形与框形之间有更本质的差别，通俗的说法是框形里有个洞。

拓扑学的起源



高斯

(1777–1855)

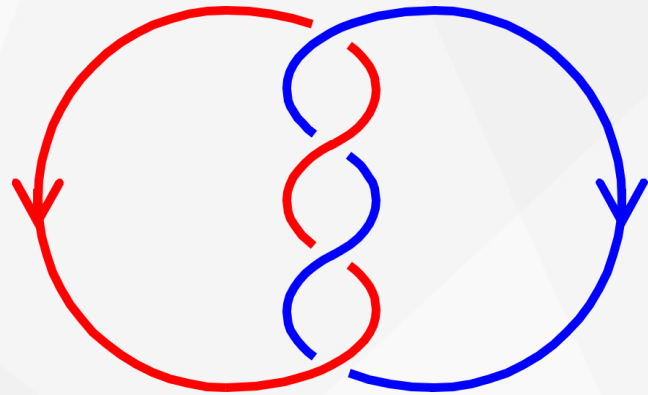
德国数学家，物理学家
天文学家

- 高斯有一个很出名的故事：用很短的时间计算出了小学老师布置的任务：对自然数从1到100的求和。他使用的方法是：
对50对构造成和101的数列求和， $1+100$ ， $2+99$ ， $3+98...$ ，同时得到结果：**5050**。这一年，高斯9岁。
- 1840年，他和韦伯画出了世界第一张地球磁场图，并且定出了地球磁南极和磁北极的位置。次年，得到美国科学家的证实。

拓扑学的起源

➤ 高斯

在电动力学中用线积分定义空间中两条封闭曲线的**环绕数**:



Definition
defined by

The *linking number* $Lk^{(1)} = Lk^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2)$ of γ_1 and γ_2 is

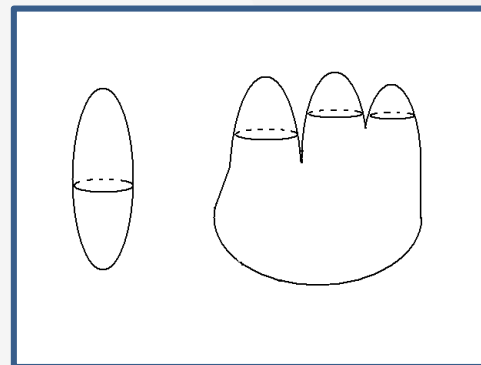
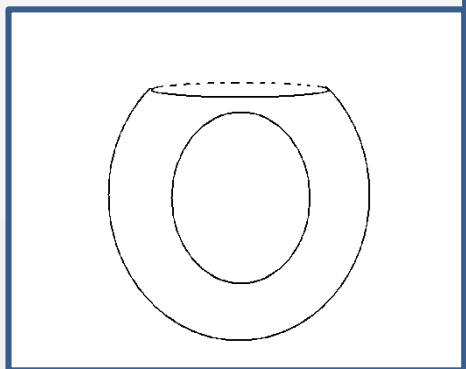
$$Lk^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dt_1 dt_2.$$

02

拓扑的内涵

拓扑学的内涵

拓扑最初是几何学的一支，主要研究**几何图形**在连续变形下**保持不变**的性质，所谓**连续变形**，形象地说就是允许**伸缩**和**扭曲**等变形，但不许**割断**和**粘合**。



经过一百多年的发展，**拓扑**已成为研究连续性现象的重要数学分支，在物理、化学、生物等众多科学门类中发挥了重要的作用。

拓扑学的内涵

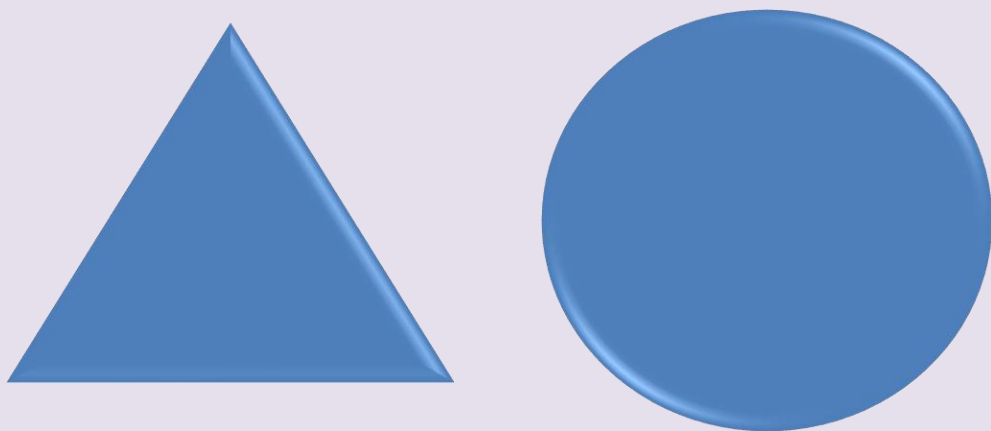
前面所说的几何图形的连续变形，确切的含义是同胚。如果连续映射

$$f: A \rightarrow B$$

将图形A的点与图形B的点之间一一对应，而且它的逆映射

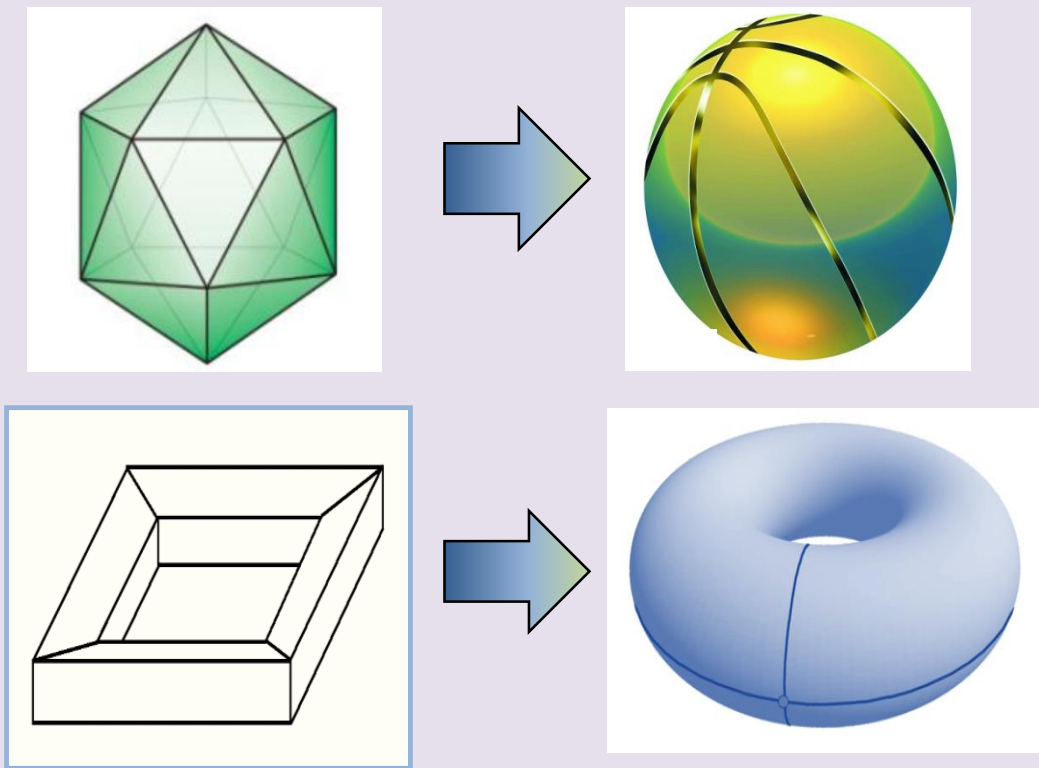
$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

也是连续的。则称**A与B同胚**。这时从拓扑学的观点看A与B的结构相同，不必加以区别。



- 例如，**三角形与圆形同胚**；而**直线与圆周不同胚**，因为**直线挖去一点后不连通**，而**圆周挖去一点后仍连通**。

拓扑学的内涵



➤ 例如，在连续变形下：
凸体的表面可以变为球面，框的表面可以变为环面（轮胎面）。

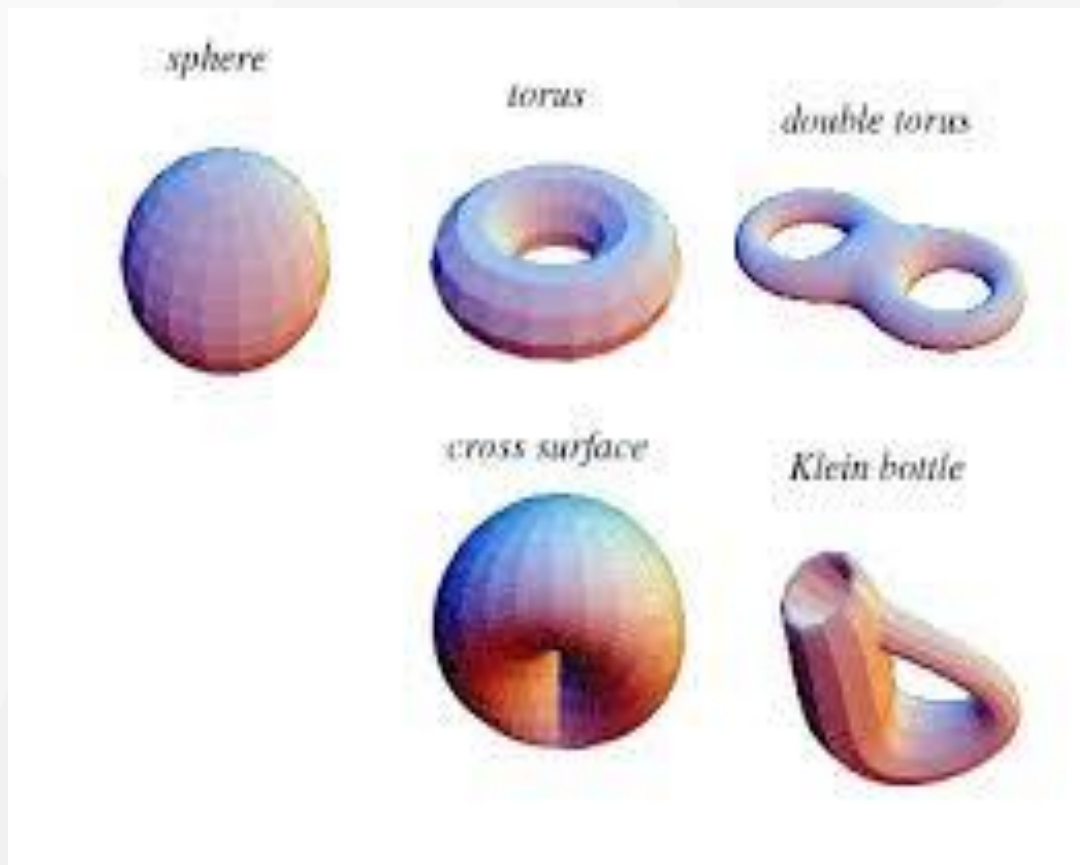
但这两者却不能通过连续变形互变！

拓扑学的内涵

在连续变形下
闭曲面有多少种
不同类型？怎样
区分它们？



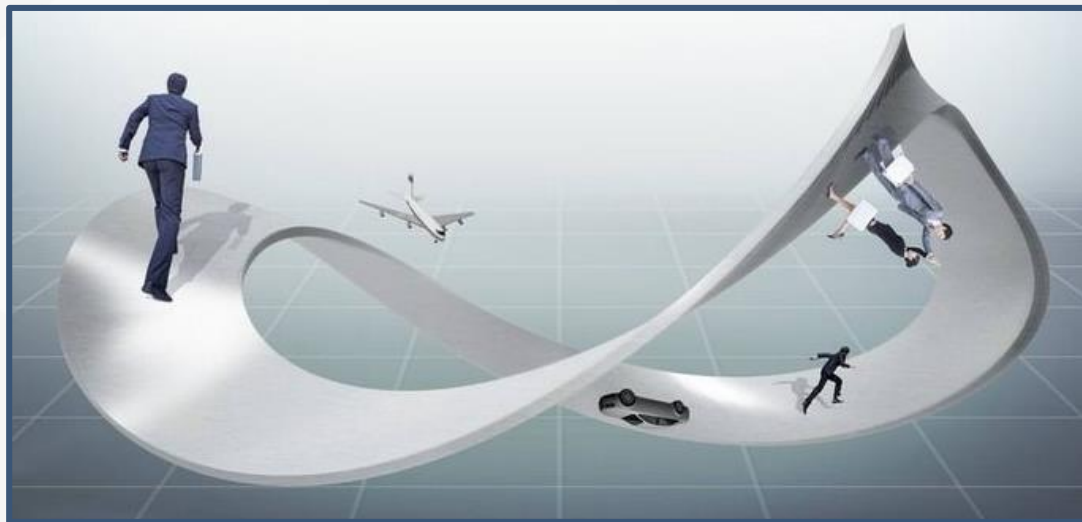
这曾是19世纪后半叶
拓扑学的主题，最后
由黎曼、Mobius等人
完成。把曲面变形成
多面体后的欧拉公式
起着关键的作用！



拓扑学的内涵：曲面的**定向**

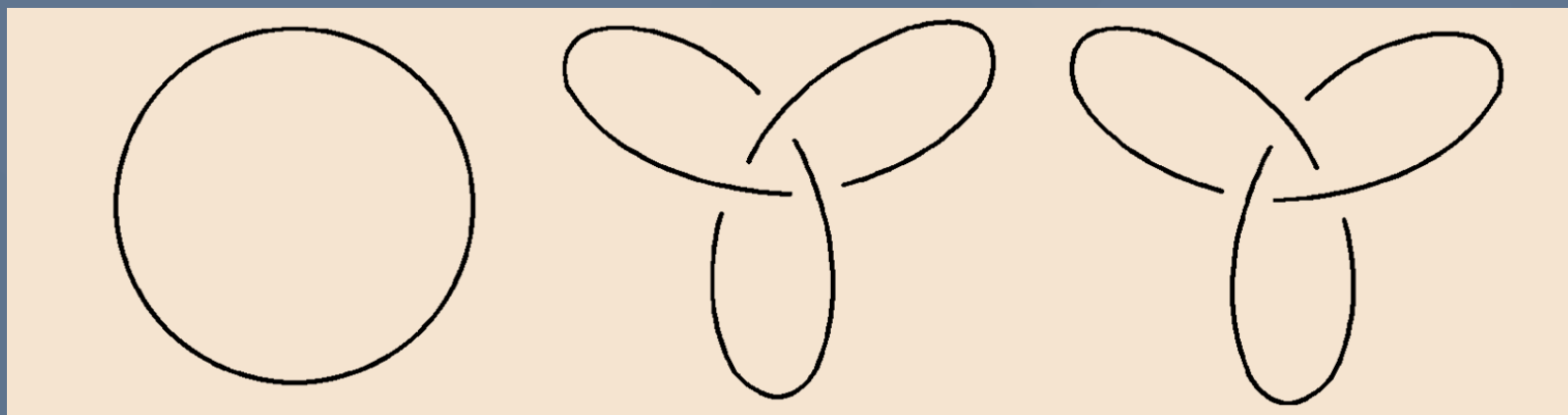
Mobius带

一对情侣在
Mobius带“上下”
两侧以相同速度
同时向左出发，
他们会相遇吗？
如果一个向左，
另一个向右呢？



拓扑学的内涵：纽结问题

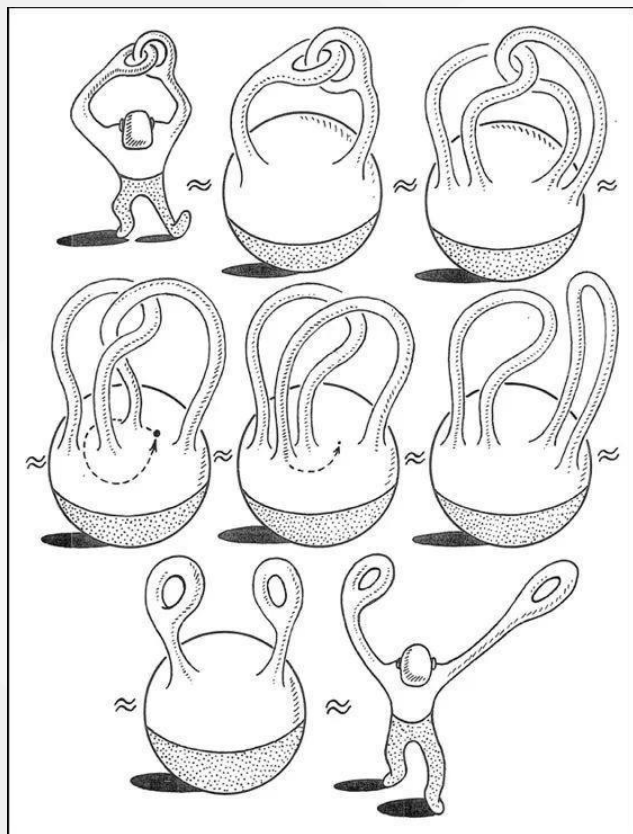
空间中一条自身不相交的封闭曲线，会发生打结现象。要问一个结能否解开（即能否变形成平放的圆圈），或者问两个结（如，图中的两个三叶结）能否互变，并且不只做个模型试试，还要给出证明，那就远不是件容易的事了（**纽结理论**）。



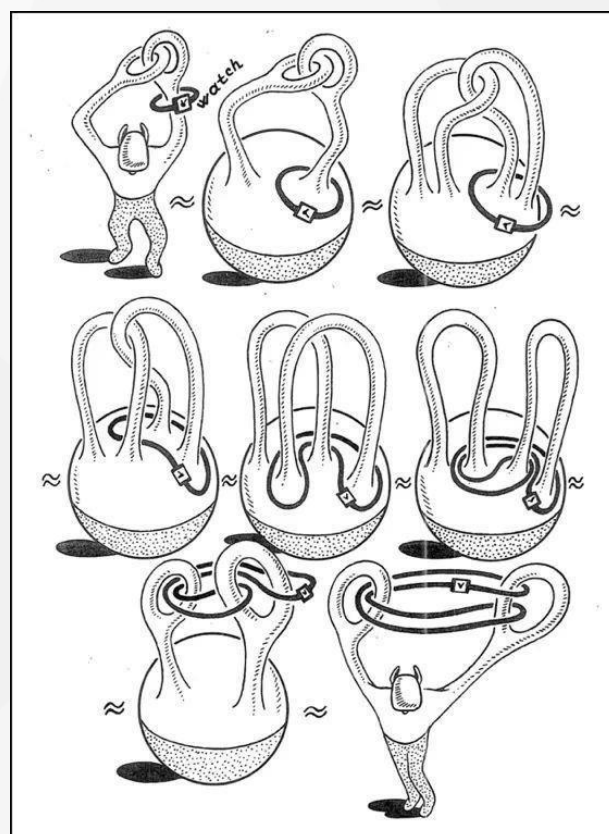
圆圈与三叶结

拓扑学的内涵：纽结问题

可以逃脱？



还可以逃脱？



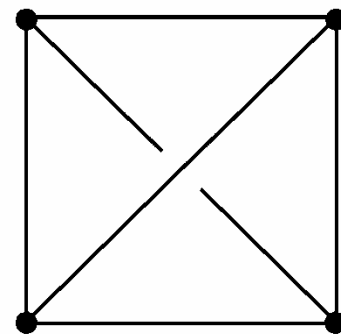
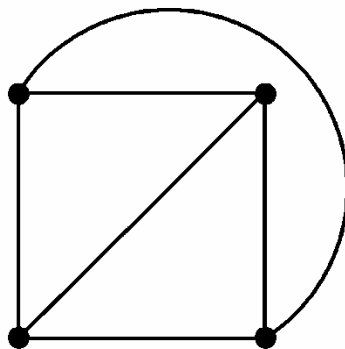
橡皮人的手铐

拓扑学的内涵：布线问题（网络嵌入问题）



一个复杂的网络能否布在平面上而不自相交叉？
做印刷电路时自然会碰到这个问题。

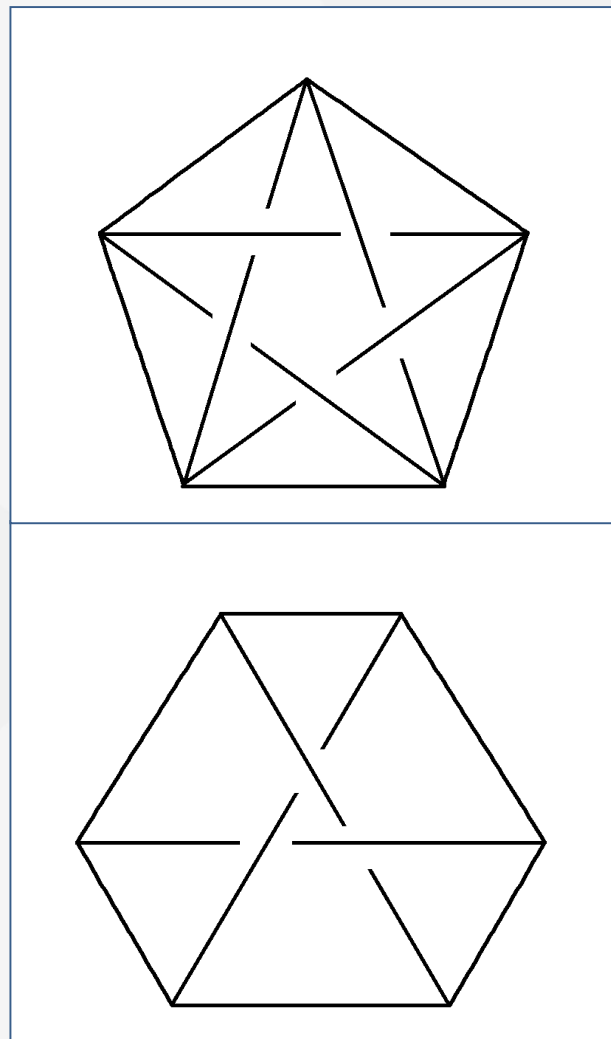
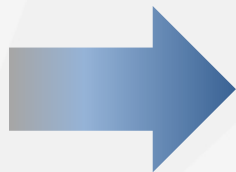
下图中左面的图把一根对角线移到方形外面就可以布在平面上。



拓扑学的内涵：布线问题（网络嵌入问题）

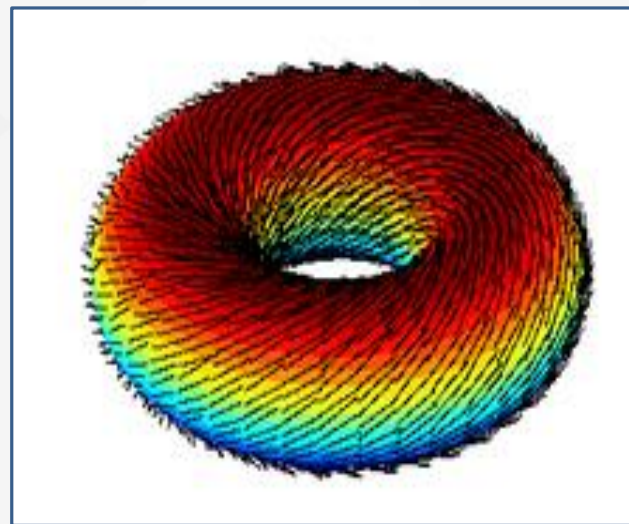
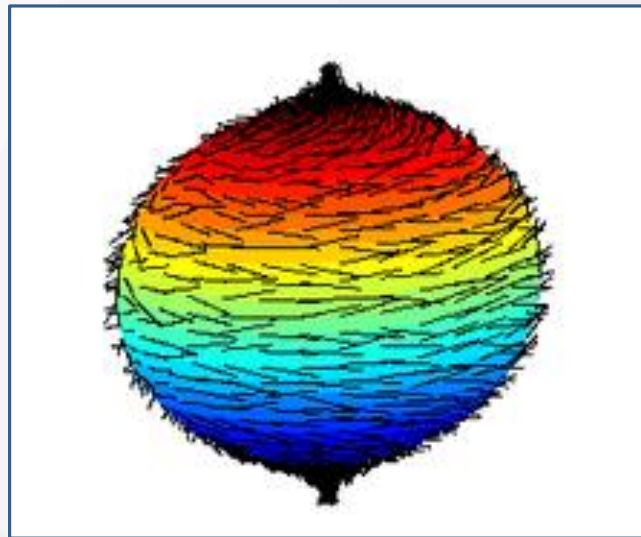
但右面的两个图却无论怎样挪动都不能布在平面上。1930年，库拉托夫斯基证明：

一个网络是否能嵌入平面，就看其中是否不含有这两个图之一。



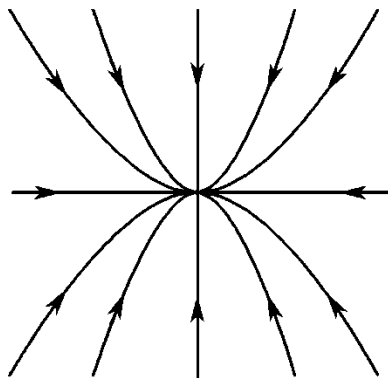
拓扑学的内涵：向量场问题

考虑光滑曲面上的连续的切向量场，即在曲面的每一点有一个与曲面相切的向量，并且其分布是连续的。其中向量等于0的地方叫做**奇点**。地球表面上每点的风速向量就组成一个随时间变化的切向量场，而**奇点就是当时没风的地方**。可以证明，球面上的连续切向量场一定有**奇点**（长头发的脑袋有**旋**），而环面上却可以造出没有奇点的向量场。

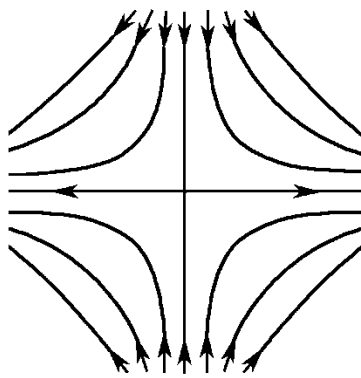


拓扑学的内涵：向量场问题

进一步分析，每个奇点有一个“**指数**”，即当动点绕它一周时，动点处的向量转的圈数；此指数有正负，视动点绕行方向与向量转动方向相同或相反而定。庞加莱发现，**球面上切向量场，只要奇点个数是有限的，这些奇点的指数的代数和（正负要相消）恒等于2**；而环面上的则恒等于0（见曲面）。这2与0恰好分别为球面与环面的欧拉数，这不是偶然的巧合。



指数=1



指数=-1

向量场
奇点的指数

03

拓扑与其他 学科的交叉

拓扑与其他学科的交叉



数学家 纳什(1928-2015)



二十二岁获得普林斯顿大学数学博士学位



当年纳什申请普林斯顿大学研究院时，他的老师为他写的推荐信只有一行字：

“此人是天才！” (This man is a genius!)



1959年，30岁的纳什患上精神分裂症，随后多次进出精神病院。

20多年后，纳什奇迹地康复过来。



拓扑与其他学科的交叉



ALICIA NASH

在他的那只有27页的博士论文《**Non-cooperative Games**》中，纳什奠定了博弈论最重要的数学基础，极大地发展了**冯•诺伊曼**创立的博弈论，并因此获得**1994年诺贝尔经济学奖**。

纳什均衡是当其余参与者的策略保持不变时，能够令参与者的混合策略最大化其收益的一个策略组合。

应用拓扑不动点定理，他证明了**纳什均衡**的存在。

拓扑与其他学科的交叉

获得诺贝尔物理学奖的“拓扑”：开启研究奇异物质的大门



III: N. Elmehed. © Nobel Media 2016
David J. Thouless
Prize share: 1/2



III: N. Elmehed. © Nobel Media 2016
F. Duncan M. Haldane
Prize share: 1/4



III: N. Elmehed. © Nobel Media 2016
J. Michael Kosterlitz
Prize share: 1/4

2016年物理学诺贝尔奖获奖工作开启了通往**奇异物质状态**研究未知世界的大门，他们的成果促成了**物质科学理论**方面的突破，并带来了新型材料研发方面的崭新视野。

索利斯、霍尔丹、科斯特利茨借助**拓扑方法**来解释在不同寻常的物质相（或状态）中出现的奇异现象，如超导体，超流体或是超薄磁膜等。

04

从组合拓扑 到代数拓扑

从组合拓扑到代数拓扑

流形概念的产生

1851年起，黎曼在复变函数的研究中提出了黎曼面的概念，并且强调，为了研究函数、研究积分，就必须研究拓扑。在几何学的研究中，黎曼明确提出了流形的概念（1854）。



（1826-1866）

从组合拓扑到代数拓扑

组合拓扑学的奠基人庞加莱

组合拓扑



(1854–1912)

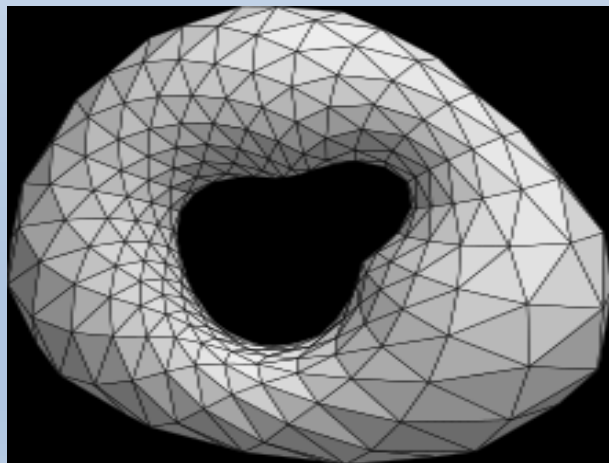
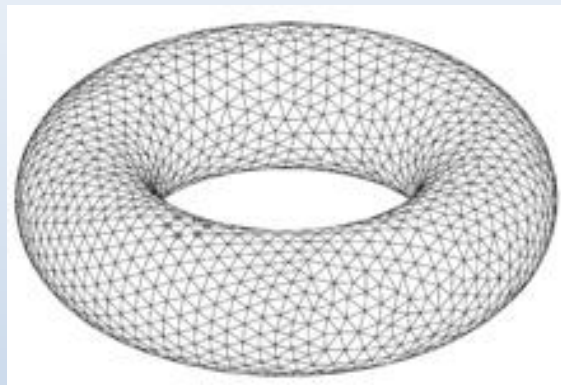


从组合拓扑到代数拓扑

庞加莱是在分析学、力学的工作中，特别是关于复变函数、微分方程的研究中，引入了拓扑思想，他的主要兴趣在 **n 维流形**。在1895–1904年间，他创立了用**剖分方法**，简单而言，**就是把几何对象（比如流形）看作一些小的三角形拼接而成**。由组合出发，他引进了许多代数不变量：

基本群、同调

并提出了具体计算的方法，其中最值得一提的：



从组合拓扑到代数拓扑

1900年，庞加莱宣称：

对于任何闭三维流形，若其同调群与三维球面同调群一致，则同胚于三维球面。

1904年，庞加莱给出了上述定理的一个反例，并提出了如下著名的庞加莱猜想：

对于任何闭三维流形，若其基本群平凡，则同胚于三维球面。

这一猜想是二十世纪拓扑学最主要的研究课题，可以说二十世纪拓扑学的发展多数是围绕这一猜想展开的。

从组合拓扑到代数拓扑

代数拓扑

随着抽象代数学的兴起，1925年，诺特提议把组合拓扑学建立在群论的基础上，在其影响下Hopf于1928年定义了同调群。从此组合拓扑学逐步演变成利用抽象代数的方法研究拓扑问题的代数拓扑学。

Eilenberg-Steenrod在1945年以公理化的方式总结了当时的同调论，后写成《代数拓扑学基础》（1952），对于代数拓扑学的传播、应用和进一步发展起了巨大的推动作用。

从组合拓扑到代数拓扑



代数拓扑学的基本方法为：
将拓扑问题转化为代数问题，
通过计算来求解！

同调群，以及在30年代引进的**上同调环**，都是从拓扑到代数的过渡。直到今天，同调论、上同调论所提供的不变量仍是拓扑学中最易于计算的，因而也是最常用的！

05

从微分拓扑 到几何拓扑

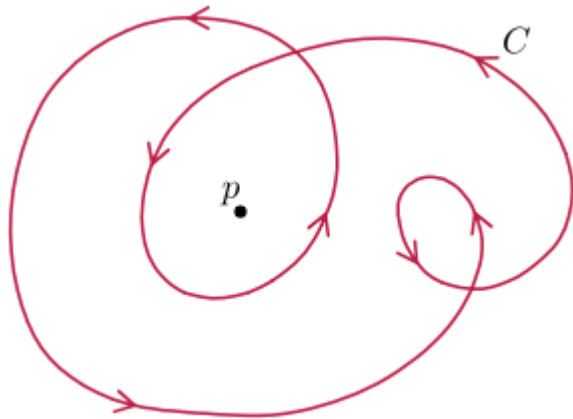
从微分拓扑到几何拓扑

微分拓扑主要研究微分流形与微分映射的拓扑学。
拉格朗日、黎曼、庞加莱都研究过微分流形；随着代数拓扑和微分几何的进步，在1930年代重新兴起。

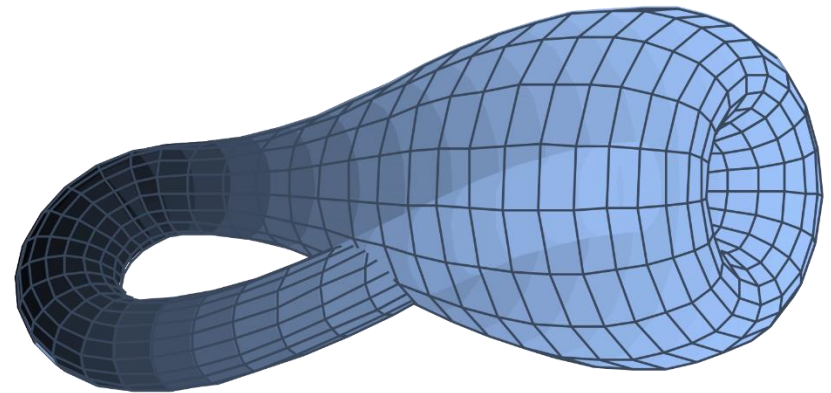
惠特尼1935年给出了微分流形的一般定义，1944年，证明它们：都能浸入、或嵌入到高维欧氏空间作为光滑的子流形。

子流形的例子

浸入的闭曲线

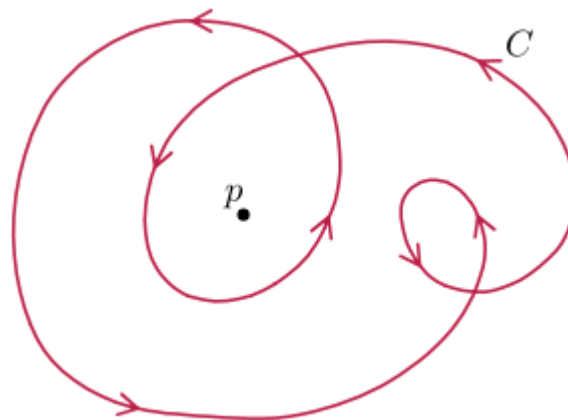


浸入的Klein瓶



平面中浸入的曲线

Whitney: 平面中浸入的曲线正则同伦类与整数一一对应，由其代数自交数唯一决定。



Boy曲面（希尔伯特问题）

1901年，Hilbert给他的学生Boy布置的课题：

“证明射影平面不能浸入到三维空间中。”

不久，Boy发现了三维空间中存在有浸入的射影平面，也就是著名的Boy曲面。



Boy曲面

x-y-z平面

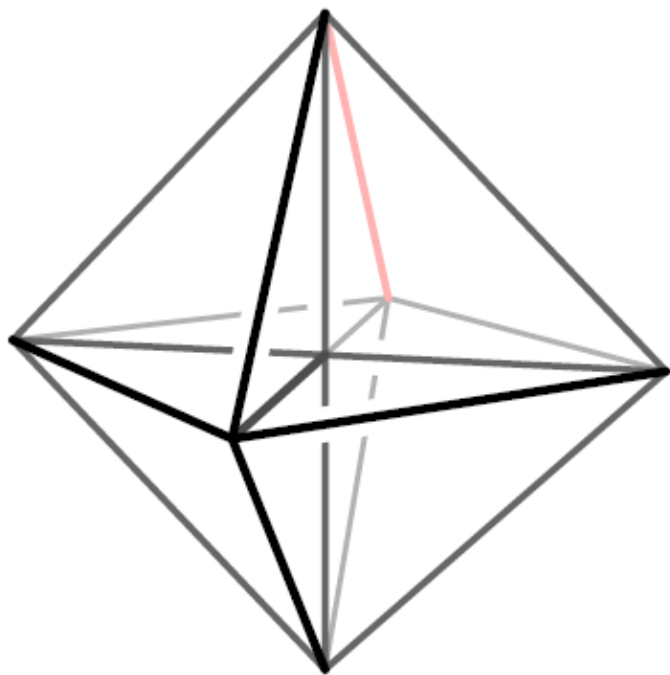


Figure 1.

添上两两不共线的四个三角形

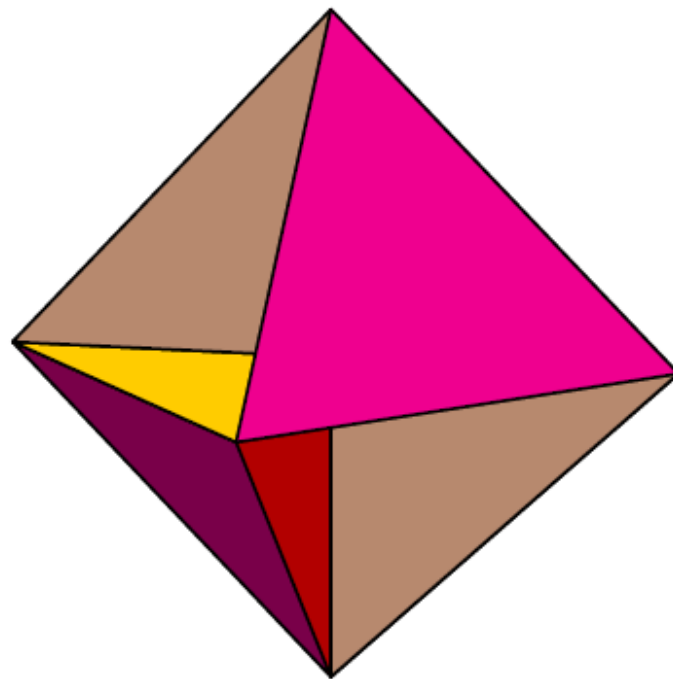
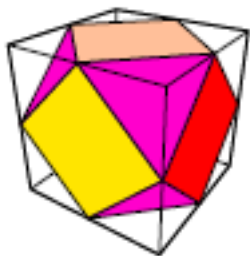


Figure 2.

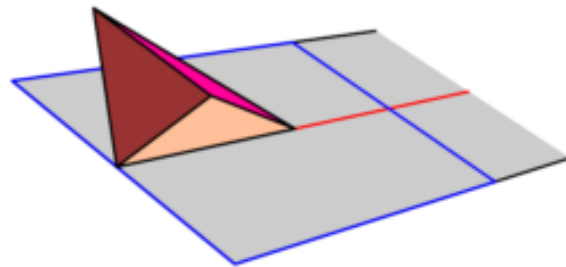
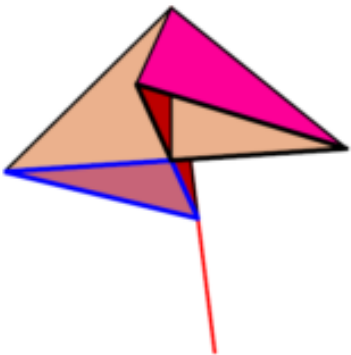
射影平面 RP^2



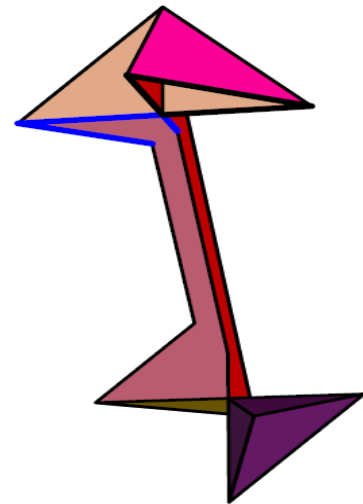
将正六面体沿八个角对称地切掉一个四面体，得到如下凸体，其表面有八个三角形，六个正方形组成。

把对径点等同起来，得到射影平面。它在三维空间中的浸入图像就是图2中的曲面。

Boy曲面光滑化



Figures 3 (left), 4 (above), and 5 (right).



Boy曲面

Whitney 伞

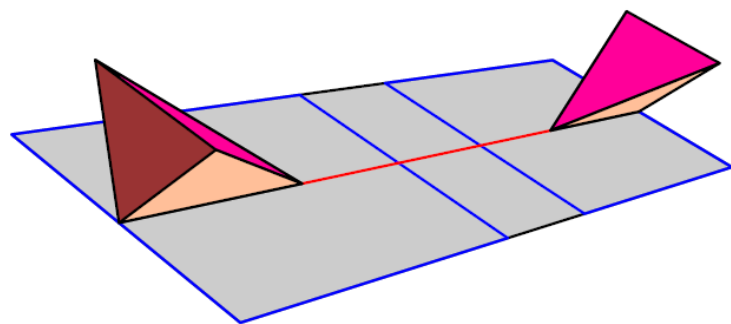


Figure 6.

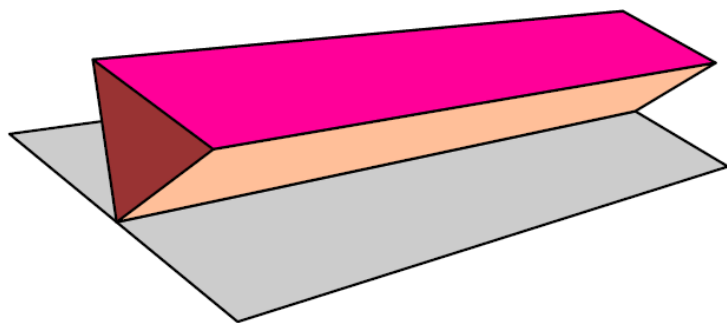
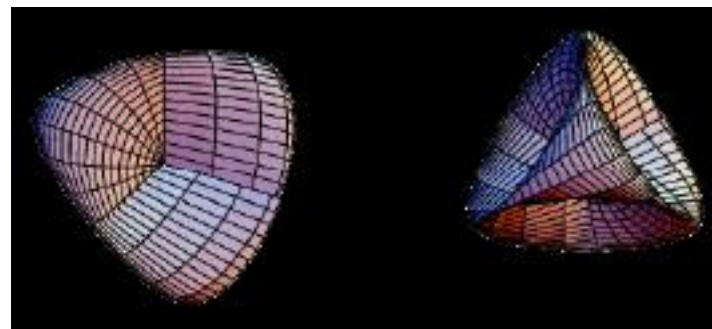


Figure 7.

三对锥点可以被消掉，得到分段线性浸入的射影平面。



希尔伯特眼中的数学

David Hilbert once said that:

a math theory should not be considered perfect until it could be explained clearly to the first man one met in the street.

Hilbert's successors have generally despaired of living up to this standard. As mathematics becomes more specialized it is difficult for a mathematician to describe, even to his colleagues, the nature of the problems he studies. From time to time, however, research on an advanced and inaccessible mathematical topic leads to a discovery that is intuitively attractive and can be explained without oversimplification. A striking example is Stephen Smale's theorem concerning regular homotopy of the 2-sphere in 3-space.

A.Phillips

从微分拓扑到几何拓扑

在空间中能把皮球的外部翻到内部吗？



Stephen Smale (1930-)
1966年获得菲尔兹奖
(数学最高奖)

<https://www.youtube.com/watch?v=Xy5gQJue99U>

1958年，Smale证明了一个震惊数学界的定理：

在三维空间中可以把二维球面的外部翻到内部（正则同伦意义下）。

1961年，Smale肯定地解决了5维及以上维数的庞加莱猜想。

从微分拓扑到几何拓扑

1980年以来，微分几何在拓扑中得到了重要应用

■ **M.Freedman**
(1986年获得菲尔兹奖)



证明了**四维庞加莱猜想**，并给出所有单连通四维流形的拓扑分类。

从微分拓扑到几何拓扑

通过Yang-Mills规范场,

引入新的、基本的**四维流形微分拓扑不变量**

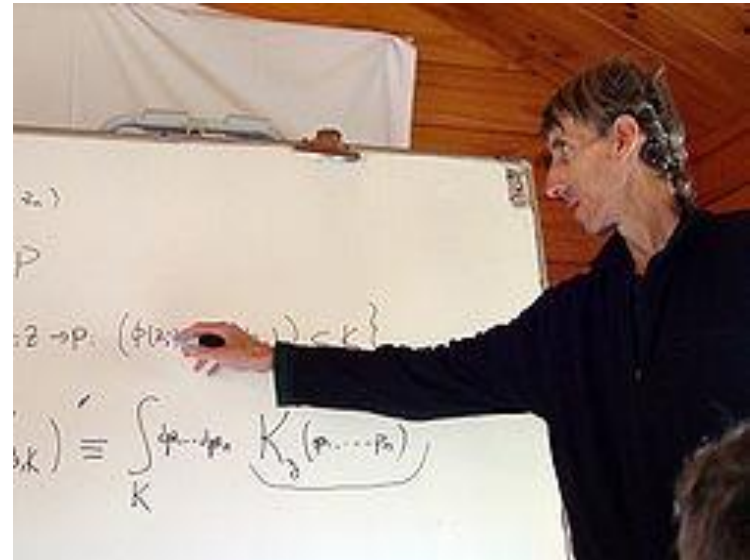


S. Donaldson
(1986年获得菲尔兹奖)

从微分拓扑到几何拓扑

在Donaldson工作基础上,

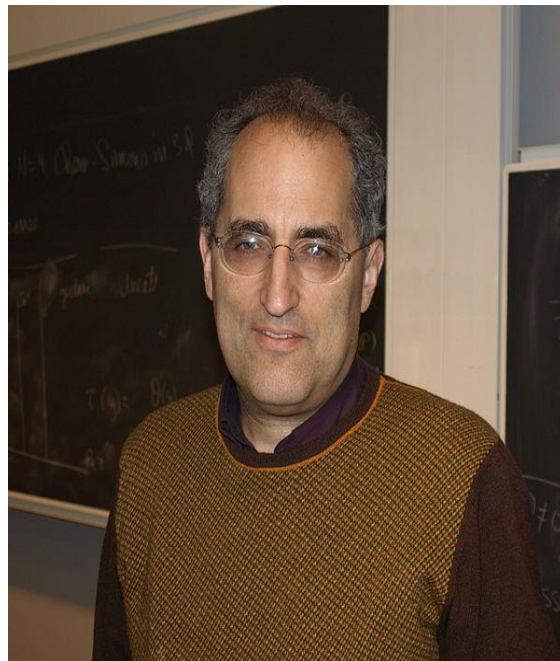
发现四维空间上存在不可数多个互不相同的光滑结构



C. Taubes
(2009年获得邵逸夫奖)

从微分拓扑到几何拓扑

1994年，通过研究磁
单极方程，发现
Seiberg-Witten不变量，
引发四维微分拓扑新
的革命



物理学家Witten
(1990年获得菲尔兹奖)

从微分拓扑到几何拓扑

■ 三维庞加莱猜想的证明(Hamilton, Perelman)

G. Perelman
(2006年获得菲尔兹奖)



从微分拓扑到几何拓扑

在空间中能把皮球的外部翻到内部吗？



Stephen Smale (1930-)
1966年获得菲尔兹奖
(数学最高奖)

<https://www.youtube.com/watch?v=Xy5gQJue99U>

1958年，Smale证明了一个震惊数学界的定理：

在三维空间中可以把二维球面的外部翻到内部（正则同伦意义下）。

1961年，Smale肯定地解决了5维及以上维数的庞加莱猜想。

Smale定理

定理 (Smale, 1958)

k维球面到q-维欧氏空间中
浸入的正则同伦类与同伦群

$$\pi_k(V_{q,k})$$

一一对应, 其中 $V_{q,k}$
为Stiefel流形 $SO(q)/SO(q-k)$ 。

**重要推论: 2-球面在
三维空间中只有一个
正则同伦类。**

Evert球面via Boy曲面

考虑浸入的Boy曲面

$$\mathbb{RP}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$$

之法球丛（区间 $[-1,1]$ 丛的边界），它是一个浸入的2-球面。沿着 $[-1,1]$ 参数从-1到+1移动，外法向最后变成内法向，也就是将2-球面的外部翻到内部！

注：这个2-球面高斯映射（外法向）的映射度为1。

定理 (Hirsch, 1961)

k 维流形 M 到 n -维欧氏空间中浸入的正则同伦类与集合 $[M, V_{\{n,k\}}]$ 一一对应。特别地，亏格为 g 的定向曲面在3维空间中有 $2^{\{2g\}}$ 个正则同伦类。

黎曼等距嵌入问题

黎曼几何学中由来已久的重要课题。Janet于1926年，Cartan于1927年，就局部等距嵌入问题，即黎曼流形的一个局部区域等距嵌入到高维欧氏空间的问题，独立地证明了如下定理：

定理：任意 n 维解析黎曼流形能够局部等距地嵌入到 $n(n+1)/2$ 维欧氏空间。

但是，若去掉解析性的要求，问题至今尚未解决。例如，对于最简单的 $n=2$ 的情况，至今仍不知道一个高斯曲率变号的二维黎曼流形是否总可以局部等距嵌入到三维欧氏空间中。

曲面的整体等距浸入问题

著名的外尔问题：

若二维黎曼流形 M 同胚于球面且高斯曲率恒正， M 能整体等距浸入到3维欧氏空间中吗？

这个问题已被Nirenberg和波戈列洛夫先后解决。亚历山德罗夫则用完全不同的所谓凸度量几何方法解决了外尔问题。

希尔伯特定理

- 希尔伯特定理：常负高斯曲率的完备曲面不能光滑等距浸入到三维欧氏空间中。
- 叶菲莫夫把上述定理的条件改进为严格负高斯曲率的完备曲面。

流形的嵌入

 **Whitney**(1944): 任何一个 n 维微分流形, 必可以嵌入到 $2n$ 维欧氏空间作为光滑子流形。

 **Nash** (1956) :任何一个 n 维黎曼流形, 必可以等距嵌入到 $n(n+1)(3n+11)/2$ 维欧氏空间作为黎曼子流形。

 **Haefliger-Hirsch、吴文俊** 等人进一步证明: 任何一个 n 维定向微分流形, 当 $n > 4$ 时, 必可以嵌入到 $2n-1$ 维欧氏空间作为光滑的子流形。

从微分拓扑到几何拓扑

一个公开三十多年悬而未决的问题：

当 $n=4$ 时，前面的定理是否成立？

1994年，本人最终彻底肯定解决了这一问题。值得一提的是：

四维定向拓扑流形的整体平坦嵌入



数论问题：
给定整数上行列式为1的正定二次型 Q ，
是否存在一个整点向量 v ，使得
 $Q(v) = \text{rank } Q$

高维流形的嵌入猜想：

任何 n 维微分流形都可以嵌入到 $2n - \alpha(n) + 1$ 维欧氏空间？

06

中国拓扑 学家的贡献

从微分拓扑到几何拓扑

陈省身

提出了**陈氏类**理论，在拓扑学的发展中奠定里程碑式的贡献，被丘成桐称为“ $2/3$ 的数学家”都需要的理论；

吴文俊

提出了**吴氏类**理论，在微分拓扑中发挥了极为重要的作用；

江泽涵、姜伯驹

对于不动点类理论有基础性的贡献，特别地，**姜伯驹**完全解决了曲面情形的著名Nielsen猜想。



谢谢大家