



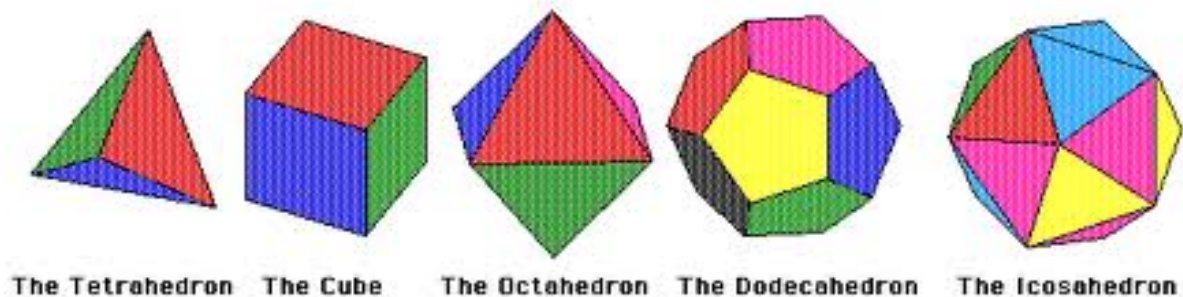
希尔伯特第十八问题，着色图与计算机证明

宗传明

天津大学

亚里士多德的一个断言

早在2300多年前,古希腊先哲们就发现了五种正规多面体:正四面体,正方体,正八面体,正十二面体和正二十面体。通常,它们被称为柏拉图多面体。



亚里士多德 (公元前384-前322) 断言: 在这五种正规多面体中, 正四面体与正方体都能够无缝隙地堆满整个空间。

在十五世纪，**Müller** 通过研究正四面体的二面角首先发现亚里士多德的断言是错的：

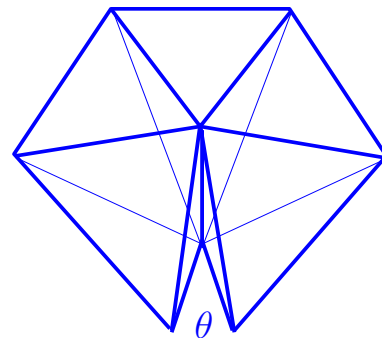
证明思路. 用 α 表示正四面体的二面角。可以证明

$$\alpha = \arccos(1/3) \approx 70^\circ 32'.$$

如果五个正四面体有一个公共棱，假设空隙的二面角为 θ (如右图)，那么

$$0 < \theta = 2\pi - 5\alpha < \alpha.$$

所以，正四面体不能在面面重合的前提下无缝隙地排满整个空间。如果不面面重合，就一定产生一个 $\pi - \alpha$ 的二面角。然而，这样的二面角显然也不能被无缝隙地排满。



开普勒猜想

1611年，基于**Harriot**的发现，开普勒提出了如下猜想：

在一个容器中堆放等半径的小球。所有小球的体积之和与容器的容积之比不超过 $\pi/\sqrt{18}$ 。

注.

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048\dots$$



定义. 如果 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 和 \mathbf{a}_3 是三维欧氏空间 E^3 中的三个线性无关向量, 我们称离散点集合

$$\Lambda = \left\{ \sum z_i \mathbf{a}_i : z_i \in Z \right\}$$

为一个三维的格 (lattice)。

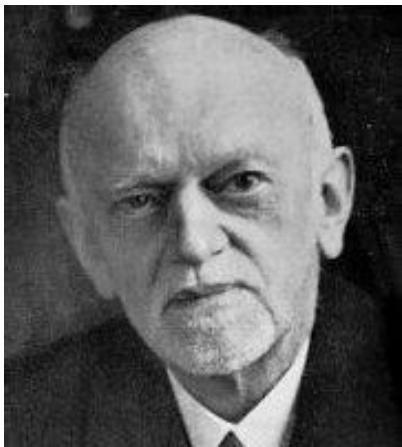
1840年, 通过研究三变元正定二次型的算术理论, 高斯证明了如下结论:

球的最大格堆积密度是

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}}.$$

换句话说, 如果球心是某个格的子集, 那么开普勒猜想成立。

希尔伯特第十八问题



Hilbert (1862 - 1943)

1900年，希尔伯特在巴黎举行的世界数学家大会上以“数学中的问题”为题做了一个报告。这可能是数学历史上最有名的一次报告。在这次报告中，他强调了23个数学问题，其中包括黎曼猜想，费马大定理等等。

基于开普勒关于堆球密度的猜想和亚里士多德关于正四面体堆积的错误，他在第十八问题中写道：“如下问题不仅对数论重要，而且可能在物理和化学中有应用：如何堆放(或者平移堆放)无穷多个相同的几何体(比如单位球或者单位棱长的正四面体)使得堆积密度最大？”

闵可夫斯基的一个错误



闵科夫斯基, H.

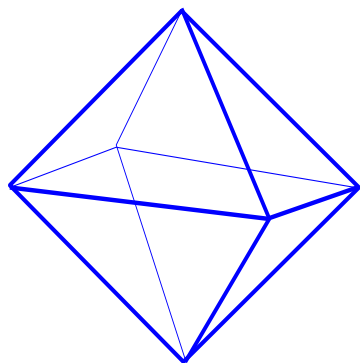
1904年，闵可夫斯基研究了希尔伯特第十八问题。他宣布：如果平移堆放全等的正四面体且平移向量构成一个格，则最大堆积密度为

$$\delta^l(T) = \frac{9}{38}.$$

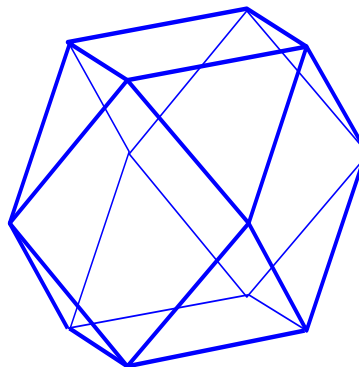
在这一过程中，他定义并研究了几何体的差体

$$D(K) = K - K = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}.$$

并宣称：正四面体的差体是一个正八面体。



Octahedron

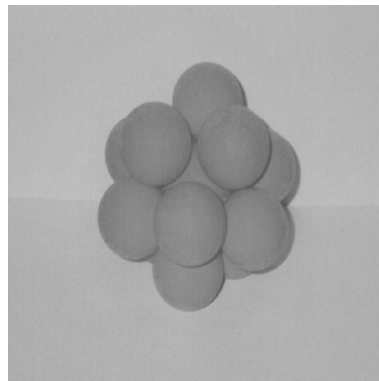
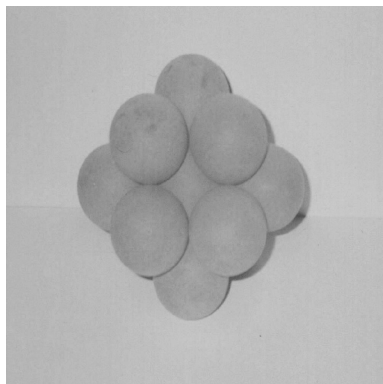


Cuboctahedron

- 1962年, **Groemer**发现了正四面体的一个格堆积其密度为 $18/49$ 。这时每一个正四面体跟14个其他的正四面体同时相切。
- 1970年, **Hoylman**证明: 正四面体的最大格堆积密度就是 $18/49$ 。
- 2000年, 基于闵可夫斯基的方法, **Betke** 和 **Henk** 设计了一个计算机算法从而可以确定任何一个多面体的最大格堆积密度。

牛顿的十三球问题及其推广

1694年，牛顿和格里高利提出并讨论了如下问题：一个球最多能跟多少个等半径的球同时相切？



1957年，Van der Waerden 和 Schütte 证明：一个球最多能跟12个等半径的球同时相切。

1957年，Hadwiger, Grünbaum等著名数学家推广并研究了牛顿的十三球问题。他们猜测：在正四面体的格堆积中一个正四面体最多跟12个其他四面体同时相切。

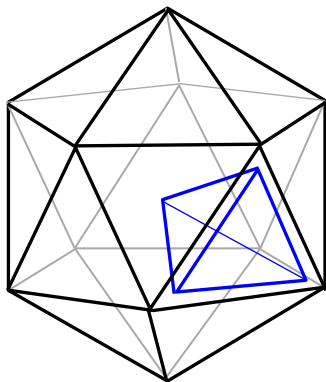
- 1996年，Zong证明：在正四面体的格堆积中，一个正四面体最多能跟18个其他正四面体同时相切。另外，他同时还发现：在正四面体的格堆积中，当密度达到最大(18/49)时每个正四面体只跟14个邻居相切；当相切数达到最大(18)时堆积密度只是1/3。
- 在一般情况下，2012年Lagarias和Zong证明：用 $\tau(T)$ 表示能同时与一个固定的正四面体相接触的正四面体的最大个数。那么

$$56 \leq \tau(T) \leq 98.$$

- 他们猜测 $\tau(T) = 56$ 。但看上去难以证明。

Conway 和 Torquato 的一个发现

2006年，Conway 和Torquato 观察到如下事实：



- 将20个正四面体堆放到一个正二十面体中可达到局部密度0.8567627....。
- 另一方面，依照Betke 和 Henk 的算法，可以得到正二十面体的最大格堆积密度是0.8363574....。
- 所以，正四面体的最大堆积密度

$$\delta^c(T) \geq 0.8363574 \times 0.8567627 \approx 0.716559.$$

- 在过去的十年中，多位著名数学家，物理学家和材料科学家(英国皇家学会会员Conway, 美国科学院院士Glotzer, 美国艺术与科学院院士Torquato等)借助计算机辅助设计不断构造出更密的正四面体堆积。至今的密度记录(E. Chen)是

$$\delta^c(T) \geq 0.856347 \dots$$

- 改进下界属构造性的，相对容易些。得到一个非平凡上界则极其困难。如果亚里士多德的断言正确，则有

$$\delta^c(T) = 1.$$

而Müller的结论仅仅表明

$$\delta^c(T) < 1.$$

- 2011年，通过复杂的计算机辅助，Gravel, Elser 和 Kallus 得到了

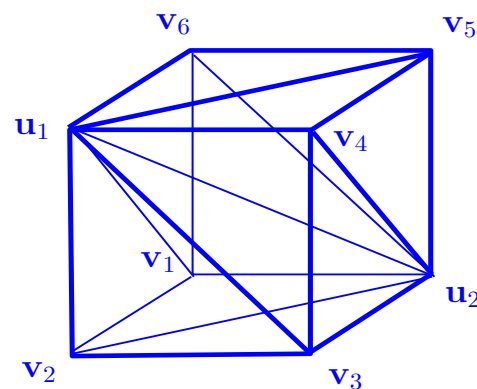
$$\delta^c(T) \leq 1 - 2.6 \times 10^{-25}.$$

物理学家的发现

- 1960年前后，著名自然科学家贝尔纳、司各特等发现：在一个容器中放入许多等半径的小玻璃球，经过适当的震动后达到平衡。经过测量可以得到一个非常稳定的密度，总在0.62左右。
- 早在开普勒以前，人们就已观察到堆球的密度可以达到 $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74$ ，并猜测其为最大值。
- 在过去的半个世纪中，许多科学家（包括中国地质学家叶大年院士）对不同形状和材料的物体做了类似的实验。特别地，当小颗粒的形状是正四面体时实验得到的密度是0.4左右。

正四面体的平移堆积

- 一个正方体可以剖分成六个全等的四面体。所以相应的全等四面体可以无缝隙地堆满整个空间。换句话说，一般堆积密度在线性群作用下并不是一个不变量。所以，从这种意义上讲 $\delta^c(T)$ 是一个物理量。



- 相反，平移堆积密度及其特殊形式格堆积密度在任意线性变换下都保持不变。换句话说，对任意的非奇异线性变换 σ ，总有

$$\delta^t(\sigma(T)) = \delta^t(T).$$

- 由于格堆积是一种特殊的平移堆积，从闵可夫斯基，Groemer等人的工作可以导出

$$\delta^t(T) \geq \frac{18}{49} \approx 0.3673469 \dots$$

- 2012年，通过系统深入地研究堆积空隙的几何结构理论，Zong得到了 $\delta^t(T)$ 的第一个上界：

$$\delta^t(T) \leq \frac{36\sqrt{10}}{95\sqrt{10} - 4} = 0.384061 \dots$$

- 在三维空间中平移堆放正四面体所能达到的最大密度 $\delta^t(T)$ 满足

$$0.3673469 \dots \leq \delta^t(T) \leq 0.384061 \dots$$

开普勒猜想的计算机证明

研究堆积问题，最自然的想法就是局部化：假设 $B + X$ 是单位球 B 的一个堆积，其中 $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \}$ 是一个离散点集合。我们定义 (Dirichlet-Voronoi Cell)

$$D(\mathbf{x}_i) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}, \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x}, \mathbf{x}_j\|\}.$$

显然， $B + \mathbf{x}_i \subseteq D(\mathbf{x}_i)$ 。如果

$$\text{vol}(D(\mathbf{x}_i)) \geq \text{vol}(B) \cdot \frac{\sqrt{18}}{\pi} = 4\sqrt{2}$$

对所有堆积 $B + X$ 中的每一个点 \mathbf{x}_i 均正确，则开普勒猜想成立。

取 $X = \{\mathbf{o}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{12}\}$ ，其中 $\|\mathbf{o}, \mathbf{x}_i\| = 2$ ， \mathbf{x}_i 是一个正二十面体的十二个顶点。容易验证， $B + X$ 是一个堆积， $D(\mathbf{o})$ 是一个正十二面体，并且

$$\text{vol}(D(\mathbf{o})) < 4\sqrt{2}.$$

取 h 为一个适当的正数。如果 $\|\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\| \leq h$, 我们就称 $B + \mathbf{x}_i$ 和 $B + \mathbf{x}_j$ 为 $B + X$ 中的 h 近邻。取

$$X_i = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}, \mathbf{x}_i\| \leq h\}$$

并且将其中的点编号为

$$X_i = \{\mathbf{x}_{ij} : j = 1, 2, \dots, m_i\},$$

其中 $m_i = \#\{X_i\}$ 。这时, 定义

$$\mu_{ij} = \frac{\text{vol}(D(\mathbf{x}_{ij}))}{m_i},$$

$$\sigma(\mathbf{x}_{ij}, X) = \frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(D(\mathbf{x}_{ij}))}$$

和

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}_i, X) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij} \sigma(\mathbf{x}_{ij}, X)}{\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{ij}}.$$

我们称 $\bar{\sigma}(\mathbf{x}_i, X)$ 为 $B + X$ 在 $B + \mathbf{x}_i$ 的局部加权密度。适当选取参数 h , 试图证明

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}_i, X) \leq \frac{\pi}{\sqrt{18}}$$

对所有的 X 都成立, 从而导出开普勒猜想。

1998年–2005年，基于这种想法，Hales将问题依照**局部图**划分为5,000多种情况。在证明过程中他考虑了100,000多个最优化问题，其中典型的情况差不多有200个变量，2,000个限制条件。可见问题的复杂程度。

毫无疑问，这项工作给审稿人带来了空前的难度：绝大多数几何学家不懂计算机程序。计算机行家很难达到这一问题的几何学高度。几经周折，黑尔斯的主要论文于2005年发表在Ann Math，该文长达120页。在此前后，他还陆续在Discrete Comput Geom 发表了6篇细节性文章，共220多页。

经过多年的进一步发展，Hales 等23个作者于2017年在Forum Math上又发表了一个计算机逻辑证明（29页）。

多面体局部堆积的彩色剖分图表示

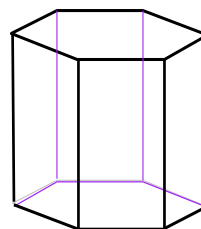
局部化理论对堆球不成功。然而，经过大量的试验观察，我们猜测局部化理论对正四面体的差体和正八面体是有效的。也就是说，假设 $P + X$ 是一个相应的堆积，那么总有

$$\frac{\text{vol}(P)}{\text{vol}(D(\mathbf{x}_i))} \leq \delta^t(P).$$

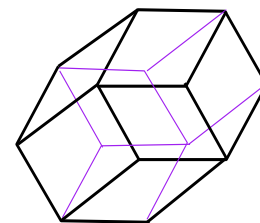
这样，我们就可以通过确定

$$\min_X \text{vol}(D(\mathbf{x}_i))$$

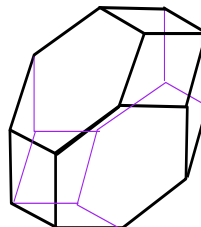
来解决Hilbert问题中正四面体和正八面体的平移情况。



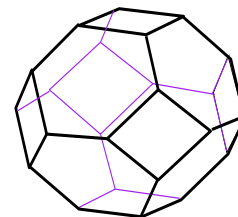
hexagonal prism



rhombic dodecahedron



elongated octahedron



truncated octahedron

Figure 1.1

假设 P 是一个具有 $2n$ 个面 $\{\pm F_1, \pm F_2, \dots, \pm F_n\}$ 的中心对称多面体, $P + X$ 是一个一般局部堆积, 其中 $X = \{\mathbf{o}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ 。我们选定 n 种颜色 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$, 然后按照如下步骤生成彩色剖分图:

- 在平面上画出 m 个点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$.
- 用一条连续曲线 e_{ij} 连接 \mathbf{v}_i 与 \mathbf{v}_j 当且仅当 $D(\mathbf{o})$ 中分别由 \mathbf{v}_i 和 \mathbf{v}_j 产生的两个面有一条公共边。
- 将 \mathbf{v}_i 染成 \mathbf{w}_k 颜色当且仅当向量 $\mathbf{o}\mathbf{x}_i$ 穿过 F_k 或 $-F_k$ 。
- 将连接 \mathbf{v}_i 与 \mathbf{v}_j 的边 e_{ij} 染成 \mathbf{w}_k 颜色当且仅当 $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_i$ 穿过 F_k 或 $-F_k$ 。

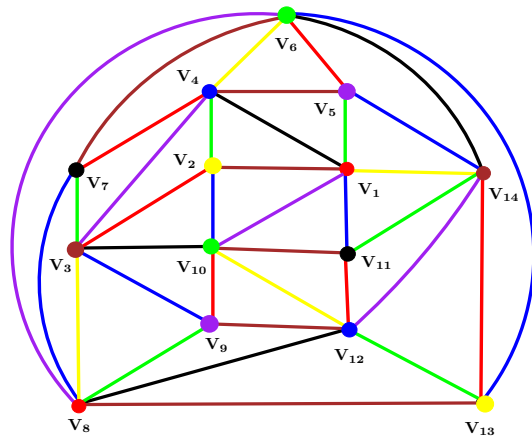


Figure 2.2

彩色剖分图隐含堆积 $P + X$ 的几何本质。当 P 是正四面体的差体时，从
 上页中的图可以导出

$$\text{vol}(D(\mathbf{o})) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{14} \sum_{j=1}^{n(i)} \sqrt{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \left(\|\mathbf{p}_i^1, \mathbf{p}_i^{j+1}\|^2 \cdot \|\mathbf{p}_i^1, \mathbf{p}_i^{j+2}\|^2 - \langle \mathbf{p}_i^{j+2} - \mathbf{p}_i^1, \mathbf{p}_i^{j+1} - \mathbf{p}_i^1 \rangle^2 \right)},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_1| \geq 2, \\ |x_2 + y_2 + z_2| \geq 4, \\ |x_3 - y_3 - z_3| \geq 4, \\ |z_4| \geq 2, \\ |x_5 - y_5 + z_5| \geq 4, \\ |y_6| \geq 2, \\ |x_7 + y_7 - z_7| \geq 4, \\ |x_8| \geq 2, \\ |x_9 - y_9 + z_9| \geq 4, \\ |y_{10}| \geq 2, \\ |x_{11} + y_{11} - z_{11}| \geq 4, \\ |z_{12}| \geq 2, \\ |x_{13} + y_{13} + z_{13}| \geq 4, \\ |x_{14} - y_{14} - z_{14}| \geq 4, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2 - y_1 + y_2 - z_1 + z_2| \geq 4, \\ |x_1 - x_4 + y_1 - y_4 - z_1 + z_4| \geq 4, \\ |y_1 - y_5| \geq 2, \\ |x_1 - x_{10} - y_1 + y_{10} + z_1 - z_{10}| \geq 4, \\ |z_1 - z_{11}| \geq 2, \\ |x_1 - x_{14} + y_1 - y_{14} + z_1 - z_{14}| \geq 4, \\ |x_2 - x_3| \geq 2, \\ |y_2 - y_4| \geq 2, \\ |z_2 - z_{10}| \geq 2, \\ |x_3 - x_4 - y_3 + y_4 + z_3 - z_4| \geq 4, \\ |y_3 - y_7| \geq 2, \\ |x_3 - x_8 + y_3 - y_8 + z_3 - z_8| \geq 4, \\ |z_3 - z_9| \geq 2, \\ |x_3 - x_{10} + y_3 - y_{10} - z_3 + z_{10}| \geq 4, \\ |x_4 - x_5 - y_4 + y_5 - z_4 + z_5| \geq 4, \\ |x_4 - x_6 + y_4 - y_6 + z_4 - z_6| \geq 4, \\ |x_4 - x_7| \geq 2, \\ |x_5 - x_6| \geq 2, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_5 - z_{14}| \geq 2, \\ |x_6 - x_7 - y_6 + y_7 - z_6 + z_7| \geq 4, \\ |x_6 - x_8 - y_6 + y_8 + z_6 - z_8| \geq 4, \\ |z_6 - z_{13}| \geq 2, \\ |x_6 - x_{14} + y_6 - y_{14} - z_6 + z_{14}| \geq 4, \\ |z_7 - z_8| \geq 2, \\ |y_8 - y_9| \geq 2, \\ |x_8 - x_{12} + y_8 - y_{12} - z_8 + z_{12}| \geq 4, \\ |x_8 - x_{13} - y_8 + y_{13} - z_8 + z_{13}| \geq 4, \\ |x_9 - x_{10}| \geq 2, \\ |x_9 - x_{12} - y_9 + y_{12} - z_9 + z_{12}| \geq 4, \\ |x_{10} - x_{11} - y_{10} + y_{11} - z_{10} + z_{11}| \geq 4, \\ |x_{10} - x_{12} + y_{10} - y_{12} + z_{10} - z_{12}| \geq 4, \\ |x_{11} - x_{12}| \geq 2, \\ |y_{11} - y_{14}| \geq 2, \\ |y_{12} - y_{13}| \geq 2, \\ |x_{12} - x_{14} - y_{12} + y_{14} + z_{12} - z_{14}| \geq 4, \\ |x_{13} - x_{14}| \geq 2. \end{array} \right.$$

计算机证明计划

- 1962年, Tutte证明: 具有 n 个顶点且互不同构的完全剖分图的个数不大于

$$\frac{2 \cdot (4n - 11)!}{(3n - 7)! \cdot (n - 2)!} \approx \frac{c}{n^{2.5}} \left(\frac{256}{27} \right)^n.$$

- 考虑 $P + X$ 堆积, 只需要考虑 $\text{card}(X) \leq 26^3$ 的情况即可。完全剖分彩色图的个数有如下上界:

$$\left(\frac{256}{27} \right)^{17576} \cdot m^{70304},$$

其中, m 是颜色的种数, 即多面体 P 的面的对数。将Gauss-Bonnet公式用于正四面体情形, 上述上界可降至

$$10^{22} \cdot 7^{82}.$$

- 具有 n 个点的完全剖分图可以由 $n - 1$ 个顶点的完全剖分图通过三种方式生成，可程序化。
- 彩色剖分图可用矩阵表示。
- 对应每一种彩色剖分图，可通过计算机求极值。
- 最后全局优化，解决Hilbert问题的平移堆积情况。

定理 (Zong). 在正四面体的平移堆积中，由Minkowski-Groemer 的格堆积所确定的密度 $18/49$ 是一个局部极大值。

参考文献

- J. Lagarias and C. Zong, Mysteries in packing regular tetrahedra, *Notices Amer. Math. Soc.*, **59** (2012), 1540-1549.
- C. Zong, On the translative packing densities of tetrahedra and cuboctahedra, *Advances in Mathematics*, **260** (2014), 130-190..
- C. Zong, A Computer Approach to Determine the Densest Translative Tetrahedron Packings, arXiv:1805.02222.



陈先生：“如果武义的结果能得到公认，华人数学的地位会提高。”