关于数学与自然科学中的不确定原理的探讨

彭实戈　山东大学

2018年11月27，四川大学

决定论与非确定论

- 决定论：整个宇宙的运行规律是确定性的, 其将来的状态已经完全由此规律所决定: 大到日月星辰，小到基本粒子$\cdots$,
- Laplace's demon

决定论与非确定论

- 决定论：整个宇宙的运行规律是确定性的, 其将来的状态已经完全由此规律所决定: 大到日月星辰，小到基本粒子$\cdots$,
- Laplace's demon
- 非确定论：不确定性是这个世界的最基本的原理

决定论与非确定论

- 决定论：整个宇宙的运行规律是确定性的, 其将来的状态已经完全由此规律所决定: 大到日月星辰，小到基本粒子$\cdots$,
- Laplace’s demon
- 非确定论：不确定性是这个世界的最基本的原理
- 上世纪20年代Heisenberg’s Uncertainty Principle （测不准原理）
- A. Einstein: "God does not play dice with the universe."
- 波尔与爱因斯坦的大辩论（Bohr-Einstein debates） $\Longrightarrow$ Bohr’s Triumph

- Kolmogorov(1933): 《概率理论基础》
- 建立了概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的公理化体系:
  任何一个随机变量X，虽然我们不能预测其精确值，$X(\omega)$，但由于知道了概率测度P，所以对于任何确定的函数$\varphi(\cdot)$，我们都能计算出X的期望值
  $$E[\varphi(X)] = \int_\Omega \varphi(X)dP,$$
  即：X的（概率）分布是确定的。

两类不确定性

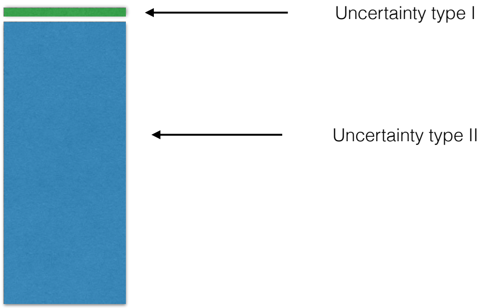
- Determinist
- Uncertainty–I: $X(\omega)$ 是随机的，但是其分布是能够确定;
- Uncertainty–II: 连X 的分布都是无法确定的，我们最多只能做到:

$$\{F_\theta(x)\}_{\theta\in\Theta} \qquad F_\theta(x) = P_\theta\{X(\omega) \leq x\}.$$

两类不确定性

- Determinist
- Uncertainty–I: $X(\omega)$ 是随机的，但是其分布是能够确定;
- Uncertainty–II: 连X 的分布都是无法确定的，我们最多只能做到:

$$\{F_\theta(x)\}_{\theta\in\Theta} \qquad F_\theta(x) = P_\theta\{X(\omega) \le x\}.$$


Uncertainty type I
Uncertainty type II

现代金融风险理论和计算的发展

- 西方的金融高技术，基本上是集中在模型化上
- 包括金融风险，金融产品价格的模型化

现代金融风险理论和计算的发展

- 西方的金融高技术，基本上是集中在模型化上
- 包括金融风险，金融产品价格的模型化
- 金融产品定价和金融风险管理的数学模型化曾经在上世纪引领了金融领域的两场重要革命。

现代金融理论的发展：两次金融革命的成果

- 1952年，Markowitz的资产组合理论（1990年诺贝尔经济学奖）

现代金融理论的发展：两次金融革命的成果

- 1952年，Markowitz的资产组合理论（1990年诺贝尔经济学奖）
- 1973年，Black-Scholes-Merton期权定价套利理论（1997年诺贝尔经济学奖）

金融革命的影响

- 高深的数学理论进入了金融——正态分布，布朗运动，随机微分方程，
- 随机控制系统，倒向随机微分方程，耗测度方法；
- 出现了天文数字的金融衍生品交易；

金融革命的影响

- 高深的数学理论进入了金融——正态分布，布朗运动，随机微分方程，
- 随机控制系统，倒向随机微分方程，鞅测度方法；
- 出现了天文数字的金融衍生品交易；
- 数学模型大量涌现，改变了世界金融市场的格局。

金融革命的影响

- 高深的数学理论进入了金融——正态分布，布朗运动，随机微分方程，
- 随机控制系统，倒向随机微分方程，鞅测度方法;
- 出现了天文数字的金融衍生品交易;
- 数学模型大量涌现，改变了世界金融市场的格局。
- 例：描述随机控制问题的微分方程

$$dX(t)=b(X(t),v(t))dt+\sigma(X(t),v(t))dB(t),$$

期权定价：最没有规律的现象的数学模型

随机微分方程描述的股票价格模型(Black-Scholes1973)

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \\
X(0) &= x_0.
\end{aligned}
$$

$$Y(t) = \pi^0(t)X^0(t) + \pi(t)X(t), \quad Z(t) := \pi(t)X(t)$$

随机微分方程描述的股票价格模型(Black-Scholes1973)

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t),\\
X(0) &= x_0.
\end{aligned}
$$

$$
Y(t) = \pi^0(t)X^0(t) + \pi(t)X(t), \quad Z(t) := \pi(t)X(t)
$$

自融资假设下期权价格模型－倒向随机微分方程

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= [rY(t) + (\mu - r)Z(t)]dt + \sigma Z(t)dB(t),\\
Y(T) &= \varphi(X(T)), \quad \text{例：} \quad \varphi(x) = (x-K)^+ = \max\{x-K, 0\}.
\end{aligned}
$$

期权定价：最没有规律的现象的数学模型

随机微分方程描述的股票价格模型(Black-Scholes1973)

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \\
X(0) &= x_0.
\end{aligned}
$$

$$Y(t) = \pi^0(t)X^0(t) + \pi(t)X(t), \quad Z(t) := \pi(t)X(t)$$

自融资假设下期权价格模型—倒向随机微分方程

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= [rY(t) + (\mu - r)Z(t)]dt + \sigma Z(t)dB(t), \\
Y(T) &= \varphi(X(T)), \quad \text{例：} \quad \varphi(x) = (x-K)^+ = \max\{x-K, 0\}.
\end{aligned}
$$

严重的问题：怎样解决模型不确定性?

数学模型大量运用改变金融市场格局

- 2008年开始的这场巨大的金融危机与金融产品的模型化的泛滥有直接关系
- Black-Scholes理论受到大量的批评；对Copula公式的指责
- 金融市场再也离不开数学模型了

造成危机的重要原因——模型不确定性

- 真正的模型实质上无法确定，怎样计算出价格？计算出风险？

造成危机的重要原因——模型不确定性

- 真正的模型实质上无法确定，怎样计算出价格？计算出风险？
- 没有采用正确的方法，就会产生虚假的价值，产生泡沫；

造成危机的重要原因——模型不确定性

- 真正的模型实质上无法确定，怎样计算出价格？计算出风险？
- 没有采用正确的方法，就会产生虚假的价值，产生泡沫；
- 泡沫的积累正是产生金融危机的一个关键原因。

- 1933年，Kolmogorov建立现代概率论理论，构成前两次金融革命的理论和计算的基础；

- 1933年，Kolmogorov建立现代概率论理论，构成前两次金融革命的理论和计算的基础;
- 模型化：要先假定一个模型性类型，可以归结成一个随机控制系统的，或更一般的概率统计模型;

理论及技术根源

- 1933年，Kolmogorov建立现代概率论理论，构成前两次金融革命的理论和计算的基础；
- 模型化：要先假定一个模型性类型，可以归结成一个随机控制系统的，或更一般的概率统计模型；
- 其根本的哲学理念是：概率模型一定存在，不确定性完全可以由这个概率统计模型来分析和计算。

理论的局限性

- 金融模型的不确定性是实质性的，不可能确定；

理论的局限性

- 金融模型的不确定性是实质性的，不可能确定；
- 概率论无法解决由于概率模型本身的不确定性而产生大量虚假计算，产生大量的泡沫。

例：Black-Scholes公式中的模型不确定性

- 获得1997年诺贝尔经济学奖的Black-Scholes公式是一个典型的例子，公式中著名的“波动率常数假设悖论”($\sigma^2 = const.$)是模型风险一个公认的典型。

例：Black-Scholes公式中的模型不确定性

- 获得1997年诺贝尔经济学奖的Black-Scholes公式是一个典型的例子，公式中著名的“波动率常数假设悖论”($\sigma^2 = const.$)是模型风险一个公认的典型。
- 这类模型不确定性的积累使金融市场产生大量泡沫。

例：Black-Scholes公式中的模型不确定性

- 获得1997年诺贝尔经济学奖的Black-Scholes公式是一个典型的例子，公式中著名的“波动率常数假设悖论”($\sigma^2 = const.$)是模型风险一个公认的典型。
- 这类模型不确定性的积累使金融市场产生大量泡沫。
- 如何通过计算这种模型误差所产生的风险，从根本上建立抑制这种泡沫大量产生的机制，是实现对于全局金融风险进行有效控制的重点。

- 1921年，著名经济学家Frank Knight在他的名著《风险，不确定性和利润》中通过系统研究论证了：

金融中模型不确定的理论研究

- 1921年，著名经济学家Frank Knight在他的名著《风险，不确定性和利润》中通过系统研究论证了：
- 支配经济现象的不确定性的主要是概率模型本身的不确定性。

金融中模型不确定的理论研究

- 1921年，著名经济学家Frank Knight在他的名著《风险，不确定性和利润》中通过系统研究论证了：
- 支配经济现象的不确定性的主要是概率模型本身的不确定性。
- 这种更复杂、更深刻的不确定性也被称为Knight不确定性（Knightian Uncertainty）。

Knight不确定性：分析和计算的困难

- 产生一些重要的结果，但是在实际中能贯彻的非常少，原因是：

Knight不确定性：分析和计算的困难

- 产生一些重要的结果，但是在实际中能贯彻的非常少，原因是：
- 在经典框架下已建立了系统的数学理论和计算工具，如：概率-统计理论，随机控制，随机微分方程；

Knight不确定性：分析和计算的困难

- 产生一些重要的结果，但是在实际中能贯彻的非常少，原因是：
- 在经典框架下已建立了系统的数学理论和计算工具，如：概率-统计理论，随机控制，随机微分方程；
- 而Knight不确定性一直没有形成系统的真正定量理论和分析、计算工具。

Knight不确定性：分析和计算的困难

- 产生一些重要的结果，但是在实际中能贯彻的非常少，原因是：
- 在经典框架下已建立了系统的数学理论和计算工具，如：概率-统计理论，随机控制，随机微分方程；
- 而Knight不确定性一直没有形成系统的真正定量理论和分析、计算工具。
- 例：VaR 计算的基本原理上仍是：是概率分布是可以确定的。

Uncertainty–II and nonlinear expected valuation:

- How to robustly quantify the uncertainty-II
- Black-Scholes pricing formula

Uncertainty–II and nonlinear expected valuation:

- How to robustly quantify the uncertainty-II
- Black-Scholes pricing formula
- In some high risky industry such as risk management of nuclear power stations, probability uncertainty are highly essential

Uncertainty–II and nonlinear expected valuation:

- How to robustly quantify the uncertainty-II
- Black-Scholes pricing formula
- In some high risky industry such as risk management of nuclear power stations, probability uncertainty are highly essential
- Covering probability uncertainty $\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$

Uncertainty–II and nonlinear expected valuation:

- How to robustly quantify the uncertainty-II
- Black-Scholes pricing formula
- In some high risky industry such as risk management of nuclear power stations, probability uncertainty are highly essential
- Covering probability uncertainty $\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$
- Nonlinearity is fundamental and necessary

Uncertainty–II and nonlinear expected valuation:

- How to robustly quantify the uncertainty-II
- Black-Scholes pricing formula
- In some high risky industry such as risk management of nuclear power stations, probability uncertainty are highly essential
- Covering probability uncertainty $\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$
- Nonlinearity is fundamental and necessary
- Worst case philosophy:

$$\hat{\mathbb{E}}[X] := \max_{\theta\in\Theta} E_{P_\theta}[X]:$$

$\hat{\mathbb{E}}$ provides us a sublinear expectation

Knight 不确定性引致的风险分析、计算的研究

- Statistics: [Huber 1981], in Robust statistics "super-expectation"
- "Maxmin utility" of [Gilboa & Schmeidler1989],
- Backward Stochastic Differential Equation [Pardoux & P.] (1990)

$$dY_t = -g(Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t, \quad Y_T = X(\omega) \qquad \text{(BSDE)}$$

- Statistics: [Huber 1981], in Robust statistics "super-expectation"
- "Maxmin utility" of [Gilboa & Schmeidler1989],
- Backward Stochastic Differential Equation [Pardoux & P.] (1990)

$$dY_t = -g(Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t, \quad Y_T = X(\omega) \qquad \text{(BSDE)}$$

g-Expectation via BSDE [P.] (1997) , [Chen & Epstein] (2002)

$$\mathbb{E}_g[X|\mathcal{F}_t] := Y_t, \quad \mathbb{E}_g[X] = Y_0, \qquad (g\text{-Expectation})$$

- Statistics: [Huber 1981], in Robust statistics "super-expectation"
- "Maxmin utility" of [Gilboa & Schmeidler1989],
- Backward Stochastic Differential Equation [Pardoux & P.] (1990)

$$dY_t = -g(Y_t, Z_t)dt + Z_t dB_t, \quad Y_T = X(\omega) \tag{BSDE}$$

g-Expectation via BSDE [P.] (1997) , [Chen & Epstein] (2002)

$$\mathbb{E}_g[X|\mathcal{F}_t] := Y_t, \quad \mathbb{E}_g[X] = Y_0, \tag{g-Expectation}$$

- Coherent risk measures in mathematical finance: [Artsner-et. al] (1999) , [Föllmer-Schied] (2002), [Delbaen-P.-Rosazza] (2005)

Definition (Nonlinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$)

- 记$\mathcal{H}$: 一个随机变量构成的线性空间Ω
  满足$c \in \mathcal{H}$; and $X \in \mathcal{H} \implies |X| \in \mathcal{H}$.

Definition (Nonlinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$)

- 记$\mathcal{H}$: 一个随机变量构成的线性空间Ω
  满足$c \in \mathcal{H}$; and $X \in \mathcal{H} \implies |X| \in \mathcal{H}$.
- 非线性数学期望 $\mathbb{E} : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}$ is a nonlinear functional

  a) 单调性: $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ if $X \geq Y$

Definition (Nonlinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$)

- 记$\mathcal{H}$: 一个随机变量构成的线性空间Ω
  满足$c \in \mathcal{H}$; and $X \in \mathcal{H} \implies |X| \in \mathcal{H}$.
- 非线性数学期望 $\mathbb{E} : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}$ is a nonlinear functional

  a) 单调性: $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ if $X \geq Y$
  b) 保常数: $\mathbb{E}[c] = c$;

非线性数学期望理论体系

Definition (Nonlinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$)

- 记$\mathcal{H}$: 一个随机变量构成的线性空间Ω
  满足$c \in \mathcal{H}$; and $X \in \mathcal{H} \implies |X| \in \mathcal{H}$.
- 非线性数学期望 $\mathbb{E} : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}$ is a nonlinear functional

  a) 单调性: $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ if $X \geq Y$
  b) 保常数: $\mathbb{E}[c] = c$;
  c) 次线性期望:

  $$\mathbb{E}[X+Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \text{ and } \mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X], \ \forall \lambda \geq 0$$

Definition (Nonlinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$)

- 记$\mathcal{H}$: 一个随机变量构成的线性空间Ω
  满足$c \in \mathcal{H}$; and $X \in \mathcal{H} \implies |X| \in \mathcal{H}$.
- 非线性数学期望 $\mathbb{E} : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}$ is a nonlinear functional

a) 单调性: $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ if $X \geq Y$

b) 保常数: $\mathbb{E}[c] = c$;

c) 次线性期望:

$\mathbb{E}[X+Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ and $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X], \ \forall \lambda \geq 0$

d) $\mathbb{E}[X_i] \downarrow 0, \ \text{if} \ X_i(\omega) \downarrow 0, \ \forall \omega$

Theorem

设$\mathbb{E}:\mathcal{H}\mapsto\mathbb{R}$ 满足条件*a)-d)*.
则存在一族定义在$(\Omega,\sigma(\mathcal{H}))$上的概率测度$\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 满足:

$$\mathbb{E}[X]=\max_{\theta\in\Theta}E_{P_\theta}[X],\quad\forall X\in\mathcal{H}.$$

非线性意义下的i.i.d.

Definition

- 称随机变量X 和Y 具有相同的概率不确定性，如果

Definition

- 称随机变量X 和Y 具有相同的概率不确定性，如果

$$X \overset{d}{=} Y \quad \Longleftrightarrow \mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\varphi(Y)],$$

- 称Y is 独立于 X，如果

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}].$$

如果

$$X + \bar{X} \overset{d}{=} 2X$$

其中$\bar{X}$与X独立同分布，则称X是最大分布的，记为$X \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]}$。
可以证明此时

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] = \max_{v\in[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \varphi(v).$$

并且 $\iff$ $u(t,x) := \hat{\mathbb{E}}[\varphi(x+tX)]$ 是如下偏微分方程的解：

$$\partial_t u = g(\partial_x u), \quad u(0,x) = \varphi(x),$$
$$g(a) = \overline{\mu}a^+ - \underline{\mu}a^-.$$

其中$\overline{\mu} = \hat{\mathbb{E}}[X]$，($X$的上均值）；$\underline{\mu} = -\hat{\mathbb{E}}[-X]$ (X的下均值)

两个最重要的非线性分布-2

如果$Y \in \mathcal{H}$满足：

$$Y + \bar{Y} \stackrel{d}{=} \sqrt{2}Y$$

其中$\bar{Y}$与Y独立同分布，则称Y是（非线性）正态分布的。记为$Y \stackrel{d}{=} N(0, [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$。

两个最重要的非线性分布-2

如果$Y \in \mathcal{H}$满足：

$$Y + \bar{Y} \overset{d}{=} \sqrt{2}Y$$

其中$\bar{Y}$与Y独立同分布，则称Y是（非线性）正态分布的。记为$Y \overset{d}{=} N(0, [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$。
可以证明此时

$$u(t, x) := \hat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}Y)]$$

是（非线性）PDE

$$\partial_t u = G(\partial^2_{xx} u), \quad u(0, x) = \varphi(x),$$
$$2G(a) = \overline{\sigma} a^+ - \underline{\sigma} a^-.$$

的解。

Nonlinear Law of large number

Theorem ([Peng2008-2010], Chen, Wu, Zhang . . .)

Assume that $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is i.i.d. sequence and*

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}[(|Y_1|-c)^+] = 0.$$

Then, for each $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n})] = \mathbb{E}[\varphi(Y)] = \max_{v\in[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \varphi(v).$$

where $\overline{\mu} = \mathbb{E}[Y_1]$, $\underline{\mu} = -\mathbb{E}[-Y_1]$. $Y \overset{d}{=} M_{[\overline{\mu},\underline{\mu}]}$: *Maximal distributed.*

Theorem ([Peng2008-2010], Chen, Wu, Zhang . . .)

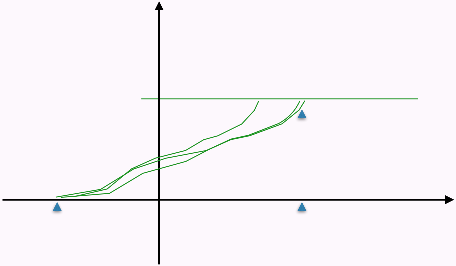
Assume that $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is i.i.d. sequence and*

$$\lim_{c\to+\infty} \mathbb{E}[(|Y_1|-c)^+] = 0.$$

Then, for each $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi(\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n})] = \mathbb{E}[\varphi(Y)] = \max_{v\in[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \varphi(v).$$

where $\overline{\mu} = \mathbb{E}[Y_1]$, $\underline{\mu} = -\mathbb{E}[-Y_1]$. $Y \overset{d}{=} M_{[\overline{\mu},\underline{\mu}]}$: *Maximal distributed.*



Important case: i.i.d. with a maximal distribution

- 一个最大分布$M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]}$ 的分布不确定性包含了所有取值限制在$[\underline{\mu},\overline{\mu}]$的随机变量的分布全体
- 直接沟通了概率分析和误差分析这两套不同的理论体系

Important case: i.i.d. with a maximal distribution

- 一个最大分布$M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]}$ 的分布不确定性包含了所有取值限制在$[\underline{\mu},\overline{\mu}]$的随机变量的分布全体
- 直接沟通了概率分析和误差分析这两套不同的理论体系
- 问题：怎样通过真实样本数据缩小$\overline{\mu}-\underline{\mu}$?

Important case: i.i.d. with a maximal distribution

- 一个最大分布$M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]}$ 的分布不确定性包含了所有取值限制在$[\underline{\mu},\overline{\mu}]$的随机变量的分布全体
- 直接沟通了概率分析和误差分析这两套不同的理论体系
- 问题：怎样通过真实样本数据缩小$\overline{\mu}-\underline{\mu}$?
- 挑战：系统建立一套包容$(\Omega,\mathcal{F},P)$体系的，稳健的且便于应用的非线性期望理论体系$(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$。

Theorem ([Peng2008-2010],[Chen,Wu],[Lin-Zhang2016])

Let $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ be i.i.d. sequence. We assume furthermore that

$$\lim_{c\to+\infty}\mathbb{E}[(|X_1|^2-c)^+]=0 \quad \mathbb{E}[X_1]=\mathbb{E}[-X_1]=0$$

Then, for each $\varphi\in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\varphi(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}})]=\mathbb{E}[\varphi(X)].$$

where X is $N(0,[\underline{\sigma}^2,\overline{\sigma}^2])$-distributed.

A deep relaten with the PDE

$$\partial_t u(t,x)=G(\partial_x^2 u),\quad u(0,x)=\varphi(x)$$

A general misunderstanding caused from

For $Y \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \implies$, we have

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is increase}}{=} \varphi(\overline{\mu})$$

A general misunderstanding caused from

For $Y \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \implies$, we have

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is increase}}{=} \varphi(\overline{\mu})$$

but

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is decrease}}{=} \varphi(\underline{\mu})$$

A general misunderstanding caused from

For $Y \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \implies$, we have

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is increase}}{=} \varphi(\overline{\mu})$$

but

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is decrease}}{=} \varphi(\underline{\mu})$$

$X \overset{d}{=} N(0, [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2]) \implies$

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is convex}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2\overline{\sigma}^2}\}\varphi(x)dx$$

A general misunderstanding caused from

For $Y \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]} \implies$, we have

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is increase}}{=} \varphi(\overline{\mu})$$

but

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(Y)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is decrease}}{=} \varphi(\underline{\mu})$$

$X \overset{d}{=} N(0, [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2]) \implies$

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is convex}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2\overline{\sigma}^2}\}\varphi(x)dx$$

but

$$\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)] \overset{\text{if } \varphi \text{ is cnocave}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{x^2}{2\underline{\sigma}^2}\}\varphi(x)dx$$

Classical 'Monté-Carlo' approach for estimating $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ through data

- Key point: How to obtain $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ through its sample $\{x_i\}_{i=1}^N$?
- In many practice cases: we care about $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ with a specific function $\varphi(x)$:
  a consumption utility function, a contract, a cost function ....
- In a classical probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, we can apply LLN to calculate

$$E[\varphi(X)] \sim \mathbb{M}[\varphi(X)] := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i)$$

  where $\{x_i\}_{i=1}^N$ is an i.i.d. sample of X.

Classical 'Monté-Carlo' approach for estimating $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ through data

- Key point: How to obtain $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ through its sample $\{x_i\}_{i=1}^N$?
- In many practice cases: we care about $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$ with a specific function $\varphi(x)$:
  a consumption utility function, a contract, a cost function ....
- In a classical probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, we can apply LLN to calculate

$$E[\varphi(X)] \sim \mathbb{M}[\varphi(X)] := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i)$$

  where $\{x_i\}_{i=1}^N$ is an i.i.d. sample of X.
- But: Is $\{x_i\}_{i=1}^N$ a classical i.i.d.?

- Let $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ be a sublinear expectation space and

$$\{x_i\}_{i=1}^{n\times m}: \quad \text{i.i.d. sample of a random vector} \quad X$$

φ-max-mean algorithm: the data-based distribution of X

- Let $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ be a sublinear expectation space and

$$\{x_i\}_{i=1}^{n\times m}: \quad \text{i.i.d. sample of a random vector} \quad X$$

- The max-mean algorithm to estimate $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$:

$$\hat{\mathbb{M}}[\varphi] = \max\{Y_n^k : k = 1, \cdots, m\},$$

- Let $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ be a sublinear expectation space and

$$\{x_i\}_{i=1}^{n\times m}: \quad \text{i.i.d. sample of a random vector} \quad X$$

- The max-mean algorithm to estimate $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$:

$$\hat{\mathbb{M}}[\varphi] = \max\{Y_n^k : k = 1, \cdots, m\},$$

where

$$Y_n^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_{n(k-1)+i}).$$

- Let $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ be a sublinear expectation space and

$$\{x_i\}_{i=1}^{n\times m}: \quad \text{i.i.d. sample of a random vector} \quad X$$

- The max-mean algorithm to estimate $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$:

$$\hat{\mathbb{M}}[\varphi] = \max\{Y_n^k : k = 1, \cdots, m\},$$

where

$$Y_n^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_{n(k-1)+i}).$$

- By nonlinear LLN, when $n \to \infty$, $\{Y_n^k\}_{k=1}^m \overset{d}{\Longrightarrow}$ an i.i.d. $\{Y^k\}_{k=1}^m$,

$$Y^k \overset{d}{=} M([\underline{\mu}_{\varphi(X)}, \overline{\mu}_{\varphi(X)}]).$$

φ-max-mean algorithm: the data-based distribution of X

- Let $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ be a sublinear expectation space and

$$\{x_i\}_{i=1}^{n\times m}: \quad \text{i.i.d. sample of a random vector} \quad X$$

- The max-mean algorithm to estimate $\hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$:

$$\hat{\mathbb{M}}[\varphi] = \max\{Y_n^k : k = 1, \cdots, m\},$$

where

$$Y_n^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_{n(k-1)+i}).$$

- By nonlinear LLN, when $n \to \infty$, $\{Y_n^k\}_{k=1}^m \overset{d}{\Longrightarrow}$ an i.i.d. $\{Y^k\}_{k=1}^m$,

$$Y^k \overset{d}{=} M([\underline{\mu}_{\varphi(X)}, \overline{\mu}_{\varphi(X)}]).$$

- But $\max\{Y^k : k = 1, \cdots, m\}$ provides us the assymptotically optimal unbiased estimate of $\overline{\mu}_{\varphi(X)} = \hat{\mathbb{E}}[\varphi(X)]$.

Optimality of the estimate

The optimality of the above estimate is based on the following quite simple, but very fundamental result:

Theorem (Jin-Peng2016)

Let $Y^1, \cdots, Y^m$ be i.i.d. and maximally distributed:

$$Y^i \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu},\overline{\mu}]}, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

where $\underline{\mu} \leq \overline{\mu}$ is two unknown parameters. Then

Optimality of the estimate

The optimality of the above estimate is based on the following quite simple, but very fundamental result:

Theorem (Jin-Peng2016)

Let $Y^1, \cdots, Y^m$ be i.i.d. and maximally distributed:

$$Y^i \overset{d}{=} M_{[\underline{\mu}, \overline{\mu}]}, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

where $\underline{\mu} \leq \overline{\mu}$ is two unknown parameters. Then

$$\underline{\mu} \leq \min\{Y^1(\omega), \cdots, Y^n(\omega)\} \leq \max\{Y^1(\omega), \cdots, Y^n(\omega)\} \leq \overline{\mu}.$$

Moreover

$$\widehat{\overline{\mu}}_n = \max\{Y^1, \cdots, Y^n\},$$

is the maximum unbiased estimate of $\overline{\mu}$.

Definition

A d-dimensional process $(B_t)_{t\geq 0}$ on a sublinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ is called a **Brownian motion** :

- $B_0(\omega) = 0$;

Brownian motion under model uncertaity

Definition

A d-dimensional process $(B_t)_{t\geq 0}$ on a sublinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ is called a **Brownian motion** :

- $B_0(\omega) = 0$;
- $B_s \overset{d}{=} B_{t+s} - B_t$, $t, s \geq 0$, and $B_{t+s} - B_t$ is independent from $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$, $\forall 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$.

Brownian motion under model uncertaity

Definition

A d-dimensional process $(B_t)_{t\geq 0}$ on a sublinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ is called a **Brownian motion** :

- $B_0(\omega) = 0$;
- $B_s \overset{d}{=} B_{t+s} - B_t,\ t, s \geq 0$, and $B_{t+s} - B_t$ is independent from $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$, $\forall 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$.
  $\lim_{t\downarrow 0} \hat{\mathbb{E}}[|B_t|^3]t^{-1} = 0$.

Definition

A d-dimensional process $(B_t)_{t\geq 0}$ on a sublinear expectation space $(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ is called a **Brownian motion** :

- $B_0(\omega) = 0$;
- $B_s \overset{d}{=} B_{t+s} - B_t$, $t, s \geq 0$, and $B_{t+s} - B_t$ is independent from $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$, $\forall 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t$.
  $\lim_{t\downarrow 0} \hat{\mathbb{E}}[|B_t|^3]t^{-1} = 0$.

Moreover, if $\hat{\mathbb{E}}[B_t] = \hat{\mathbb{E}}[-B_t] = 0$, then $(B_t)_{t\geq 0}$ is called a **symmetric Brownian motion**.

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- mark to model

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- mark to model
- Markowitz

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- mark to model
- Markowitz
- Marking to model

Knightian Uncertainty
in pricing and risk measuring

- mark to model
- Markowitz
- Marking to model
- Black-Scholes-Merton（KMV,...)

- mark to model
- Markowitz
- Marking to model
- Black-Scholes-Merton（KMV,...)

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dB_t]$$

B_t: 非线性布朗运动

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- Normal, Poisson based modeling

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- Normal, Poisson based modeling
- Brownian motion based modeling

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- Normal, Poisson based modeling
- Brownian motion based modeling
- Poisson and Lévy process based modeling
- utility maximizations

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- Normal, Poisson based modeling
- Brownian motion based modeling
- Poisson and Lévy process based modeling
- utility maximizations
- binomial tree model

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- Normal, Poisson based modeling
- Brownian motion based modeling
- Poisson and Lévy process based modeling
- utility maximizations
- binomial tree model
- heavy tail analysiss
- stress testing

非线性期望下的系统模型

$$dx_t = b(t, x_t, v_t)dt + \sigma(t, x_t, v_t)dw_t, \quad x_0 = \bar{x}$$

非线性期望下的系统模型

$$dx_t = b(t, x_t, v_t)dt + \sigma(t, x_t, v_t)dw_t, \quad x_0 = \bar{x}$$

$$dx_t = x_t d\beta_t + \sigma x_t dB_t, \quad x_0 = \bar{x}$$

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	
独立性: Y 独立于X	
大数 & 中心极限定理	
正态分布	
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	
大数 & 中心极限定理	
正态分布	
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	Y 独立于X, (non-symm.)
大数 & 中心极限定理	
正态分布	
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	Y 独立于X, (non-symm.)
大数 & 中心极限定理	大数+ 中心极限定理
正态分布	
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	Y 独立于X, (non-symm.)
大数 & 中心极限定理	大数+ 中心极限定理
正态分布	非线性正态分布
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	Y 独立于X, (non-symm.)
大数 & 中心极限定理	大数+ 中心极限定理
正态分布	非线性正态分布
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	非线性布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$,
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	Y 独立于X, (non-symm.)
大数 & 中心极限定理	大数+ 中心极限定理
正态分布	非线性正态分布
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	非线性布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$,
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	$\langle B \rangle_t$: 一种新的布朗运动
Lévy 过程	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$: (sublinear is basic)
分布: $X \overset{d}{=} Y$	$X \overset{d}{=} Y$,
独立性: Y 独立于X	Y 独立于X, (non-symm.)
大数 & 中心极限定理	大数+ 中心极限定理
正态分布	非线性正态分布
布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$	非线性布朗运动$B_t(\omega) = \omega_t$,
平方变差过程$\langle B \rangle_t = t$	$\langle B \rangle_t$: 一种新的布朗运动
Lévy 过程	非线性Lévy 过程

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	
马尔科夫过程	
鞅过程	
$E[X\|\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	$dx_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t + \beta_t d\langle B\rangle_t$
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	
马尔科夫过程	
鞅过程	
$E[X\|\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	$dx_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t + \beta_t d\langle B\rangle_t$
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	$\partial_t u - G(t, x, u, Du, D^2 u) = 0$
马尔科夫过程	
鞅过程	
$E[X\vert\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	$dx_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t + \beta_t d\langle B\rangle_t$
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	$\partial_t u - G(t,x,u,Du,D^2u) = 0$
马尔科夫过程	非线性马氏过程
鞅过程	
$E[X\|\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	$dx_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t + \beta_t d\langle B\rangle_t$
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	$\partial_t u - G(t, x, u, Du, D^2 u) = 0$
马尔科夫过程	非线性马氏过程
鞅过程	非线鞅过程
$E[X\|\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	

概率论公理体系v.s. 非线性期望理论

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	$dx_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t + \beta_t d\langle B\rangle_t$
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	$\partial_t u - G(t,x,u,Du,D^2u) = 0$
马尔科夫过程	非线性马氏过程
鞅过程	非线鞅过程
$E[X\|\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X] + \int_0^t z_s dB_s + K_t$

概率空间	非线性期望空间
布朗运动的Itô随机分析	非线性布朗运动的Itô's 随机分析
Itô过程$dx_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB_t$	$dx_t = \alpha_t dt + \sigma_t dB_t + \beta_t d\langle B\rangle_t$
扩散过程$\partial_t u - \mathcal{L}u = 0$	$\partial_t u - G(t, x, u, Du, D^2 u) = 0$
马尔科夫过程	非线性马氏过程
鞅过程	非线鞅过程
$E[X\|\mathcal{F}_t] = E[X] + \int_0^T z_s dB_s$	$\mathbb{E}[X\|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X] + \int_0^t z_s dB_s + K_t$ $K_t = \int_0^t \eta_s d\langle B\rangle_s - \int_0^t 2G(\eta_s)ds$

怎样在金融风险控制和其他工程控制中应用?

- 首先通过传统，或国际公认的建模方法建立其模型或控制模型(例如假设变量的确定性、或i.i.d, 高斯分布，泊松分布等等，及布朗运动干扰等等）由此获得其
- 使用ϕ-Max-Mean等方法对于（真实的）样本数据测试其概率模型不确定性的大小，如果检验不能通过，就要进一步考虑使用相对应的非线性期望下的模型参数
-

- 沪深300 5 年的日收益率数据$\{X_t\}$ 2010年4月13 - 2015年4月16

- 沪深300 5 年的日收益率数据$\{X_t\}$ 2010年4月13 - 2015年4月16
- $VaR_{\alpha,t}(X_{t+1})$为时间t的X_{t+1}的VaR

$$VaR_{\alpha,t}(X_{t+1}) = \max\{x : E[1_{X_{t+1}\le x}|X_s, s \le t] \le \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1)$$

金融市场实证检验: 稳健的G-VaR

- 沪深300 5 年的日收益率数据$\{X_t\}$ 2010年4月13 - 2015年4月16
- $VaR_{\alpha,t}(X_{t+1})$为时间t的X_{t+1}的VaR

$$VaR_{\alpha,t}(X_{t+1}) = \max\{x : E[1_{X_{t+1}\le x}|X_s, s \le t] \le \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1)$$

- $VaR_{\alpha,t}(X_{t+1})$ 是金融界目前应用最广泛的风险度量，要求在t时刻计算出X_{t+1}的VaR-值，使得X_{t+1} 超出此值的概率小于给定值α

金融市场实证检验: 稳健的G-VaR

- 沪深300 5 年的日收益率数据$\{X_t\}$ 2010年4月13 - 2015年4月16
- $VaR_{\alpha,t}(X_{t+1})$为时间t的X_{t+1}的VaR

$$VaR_{\alpha,t}(X_{t+1}) = \max\{x : E[1_{X_{t+1}\le x}|X_s, s \le t] \le \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1)$$

- $VaR_{\alpha,t}(X_{t+1})$ 是金融界目前应用最广泛的风险度量，要求在t时刻计算出X_{t+1}的VaR-值，使得X_{t+1} 超出此值的概率小于给定值α
- 目前金融解不用X_{t+1}的数学模型计算，只用Historical data VaR

$$H\text{-}VaR_{\alpha,t}(X_{t+1}) = \max\{x : \frac{\sharp(X_s \le x : t-l+1 \le s \le t)}{l} \le \alpha\}.$$

模型为$N(\mu,\sigma^2)$及其它模型的VaR

- $X_{t+1} \overset{d}{=} N(\hat{\mu}_t, \hat{\sigma}_t^2)$
- Historical VaR:

$$VaR_{\alpha,t}(X_{t+1}) = \max\{x : \hat{P}_t(X \le x) \le \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1)$$

- $X_{t+1} \stackrel{d}{=} N(\hat{\mu}_t, \hat{\sigma}_t^2)$
- Historical VaR:

$$VaR_{\alpha,t}(X_{t+1}) = \max\{x : \hat{P}_t(X \le x) \le \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1)$$

Nonlinear (Robust) Normal distribution modeling

- $$X_{t+1} \overset{d}{=} N([\hat{\mu}_t, [\overline{\hat{\sigma}}^2_t, \underline{\hat{\sigma}}^2_t])$$

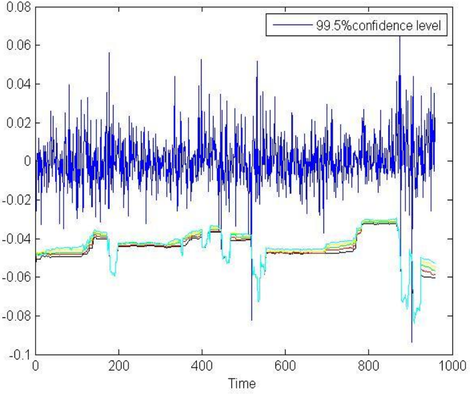


Figure 1 Deep blue curve: daily returns of CSI300 from April 14, 2011 to April 16, 2015. G-VaR curves with parameter $\underline{\sigma}$ and $\overline{\sigma}$ estimate through different window width: light blue for 120, yellow for 110, green for 100, red for 90 and black 80

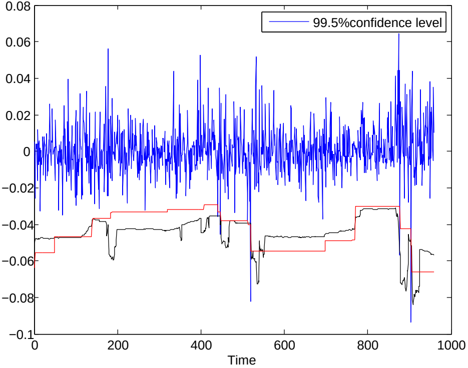


Figure 2 H-VaR (red) comparing to G-VaR (black), window width 100.

Exceedance rate of H-VaR comparing to G-VaR			
α	99%	99.5%	99.7%
H-VaR	0.94%	0.63 %	0.52%
G-VaR	0.63%	0.52 %	0.31%

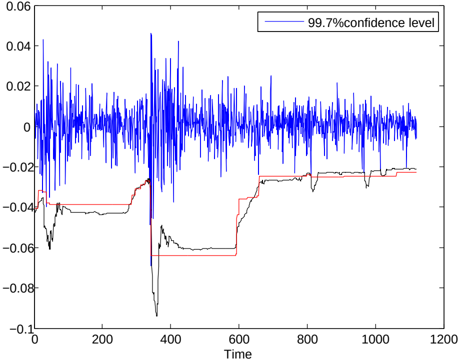


Figure 3. deep blue: S&P 500 daily returns from 04/03/2010 to 09/12/2014, black: G-VaR; red: H-VaR.

Exceedance rate of H-VaR comparing to G-VaR			
α	99%	99.5%	99.7%
H-VaR	1.16 %	0.62 %	0.45 %
G-VaR	0.89 %	0.62 %	0.36 %

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- $$dr_t = \alpha dt + \sigma dB_t$$ Merton (1973)

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- $$dr_t = \alpha dt + \sigma dB_t \qquad \text{Merton (1973)}$$
  $$dr_t = \alpha(t)dt + \sigma dB_t \qquad \text{Ho-Lee(1986)}$$

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

- $$\begin{aligned} dr_t &= \alpha dt + \sigma d B_t && \text{Merton (1973)} \\ dr_t &= \alpha(t) dt + \sigma d B_t && \text{Ho-Lee(1986)} \\ dr_t &= \alpha r_t dt + \sigma r_t d B_t && \text{Dothan(1978)} \end{aligned}$$

Knightian Uncertainty in pricing and risk measuring

$dr_t = \alpha dt + \sigma d{\color{red}B}_t$	Merton (1973)
$dr_t = \alpha(t)dt + \sigma d{\color{red}B}_t$	Ho-Lee(1986)
$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t d{\color{red}B}_t$	Dothan(1978)
$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma r_t d{\color{red}B}_t$	Vasichek(1977)
$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)d{\color{red}B}_t$	Hull-White(1990)
$d\ln r_t = (a(t) - b(t)\ln r_t)dt + \sigma(t)d{\color{red}B}_t$	Black-Karasinski(1991)
$b(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$	Black-Derman-Toy(1990)
$dr_t = (\alpha r_t^{\delta-1} - \beta r_t)dt + \sigma r_t^{\delta/2} d{\color{red}B}_t$	Marsh-Rosenfeld(1983)
$(\delta = 3, \quad \beta = 0)$	Constandinides-Ingersoll(19
$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d{\color{red}B}_t$	Cox-Ingersoll-Ross(1990)
$dr_t = (\alpha(t) - \beta(t)r_t)dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}d{\color{red}B}_t$	Hull-White(extended CIR)(
$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma(\gamma + r_t)^{1/2}d{\color{red}B}_t$	Pearson-Sun(1994)

THANKS 谢谢