

# SYK模型和随机矩阵

田刚

北京国际数学研究中心

# 目录

- 1 Sachdev-Ye-Kitaev模型概述
- 2 随机矩阵
- 3 SYK主要结果和问题

## 1 Sachdev-Ye-Kitaev模型概述

## 2 随机矩阵

## 3 SYK主要结果和问题



Figure: ICTP



# Subir Sachdev



Figure: S. Sachdev

# Subir Sachdev

- S.Sachdev: 为哈佛大学物理系Herchel Smith Professor。
- 研究方向：凝聚态物理。
- 美国国家科学院院士，获得美国物理学会颁发的Lars Onsager Prize和ICTP颁发的Dirac Medal。

# Alexei Kitaev

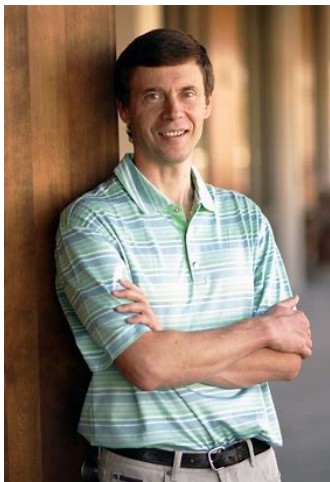


Figure: A. Kitaev



# Alexei Kitaev

- Alexei Kitaev: 为加州理工大学物理系教授
- 研究方向: 量子信息, 量子纠错码和拓扑量子计算。
- 2012年获基础物理学奖

# SYK模型概述

- SYK模型是一个有随机相互作用的量子多体系统。
- 组成系统的粒子数越多，相互作用使求解变得非常复杂，并且通常会引入混沌，即常说的蝴蝶效应。而SYK模型集几种属性于一身：它作为多体系统是混沌的，但同时具有一定的可解性，并存在一个和它对应的含黑洞引力系统。
- SYK模型的主要特点体现在它的能谱分布上。

# Sachdev-Ye模型

- SYK模型的原型是1993年Sachdev-Ye提出的量子自旋系统模型, 可以用来描述一种新的没有准粒子的物态- 奇异金属态(strange metal)。
- SY模型: 给定 $n$ 个Majorana费米子,  $n$ 为偶数, 考虑任意两个自旋之间的随机相互作用,

$$H_{SY} = \frac{i}{\sqrt{\binom{n}{2}}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} J_{i_1 i_2} \psi_{i_1} \psi_{i_2}$$

$\psi_1, \dots, \psi_n$ 是Majorana费米子,  $J_{i_1 i_2}$ 是标准高斯随机变量。

# Sachdev-Ye模型

- $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  为泡利矩阵。在量子力学中，它们出现在泡利方程中描述磁场和自旋之间相互作用的一项。它们和单位矩阵一起构成  $2 \times 2$  厄米矩阵空间的一组基。

- Majorana费米子可以用这三个泡利矩阵表示。例如， $n = 6$ ，则6个Majorana费米子可以表示为  $8 \times 8$  矩阵：

$$\psi_1 = X \otimes I \otimes I, \psi_2 = Y \otimes I \otimes I, \psi_3 = Z \otimes X \otimes I, \psi_4 = Z \otimes Y \otimes I, \\ \psi_5 = Z \otimes Z \otimes X, \psi_6 = Z \otimes Z \otimes Y.$$

- $J_{i_1 i_2}$  为标准高斯随机变量，即满足

$$\mathbb{P}(J_{i_1 i_2} \geq s) = \int_s^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

- 从而SY(K)模型可以看成是随机矩阵模型。

# 从SY到SYK

- Kitaev所感兴趣的问题包括理论物理中很活跃的引力全息对偶(AdS/CFT对应): 一个处在d维时空中没有引力的量子体系可以和另一个d+1维时空中的量子引力系统存在某种对应, 即低维系统是高维系统的某种全息投影。
- Kitaev发现SYK模型可能实现1维-2维的对应, 这是最简单的维数。自2015年提出以来它引起了理论物理学家们的广泛关注。
- SYK模型: 考虑任意四个自旋之间的随机相互作用,

$$H_{\text{SYK}} = \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{4}}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} J_{i_1 i_2 i_3 i_4} \psi_{i_1} \psi_{i_2} \psi_{i_3} \psi_{i_4}.$$

- 研究SYK需要用到随机矩阵中的方法。

- 1 Sachdev-Ye-Kitaev模型概述
- 2 随机矩阵
- 3 SYK主要结果和问题

# 经典随机矩阵模型一：高斯系综

Wigner-Dyson分类：the threefold way

- GUE(Gaussian unitary ensemble): 是复厄米矩阵 $(H_{ij})_{n \times n}$ ，非对角元 $H_{ij} = \overline{H_{ji}}$ ,  $i \neq j$ 是独立的标准复值高斯随机变量，对角元 $H_{ii}$  是独立的标准实值高斯随机变量，特征根分布是 $U(n)$  变换下不变的；
- 类似的，GOE(Gaussian orthogonal ensemble) 是实的对称矩阵，每个元素是独立同分布实高斯变量，在 $O(n)$ 作用下不变；
- GSE(Gaussian symplectic ensemble) 需要用到四元数，分布是在辛作用下不变的。

# 经典随机矩阵模型一：密度函数

令 $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ 为GUE/GOE/GSE的特征根，通过计算高斯测度，特征根联合密度函数为

$$J(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_{\beta,n}} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\beta n}{4} \lambda_k^2} \prod_{i < j} |\lambda_j - \lambda_i|^\beta,$$

其中 $Z_{\beta,n}$ 是归一化常数，可以由Selberg积分计算得出。 $\beta = 1$ 对应于GOE,  $\beta = 2$ 对应于GUE,  $\beta = 4$ 对应于GSE。



## 经典随机矩阵模型二：圆系综

Dyson圆系综:

- CUE(circular unitary ensemble): 考虑的是 $U(n)$ 群以及 $U(n)$ 上的Haar测度;
- 类似的, COE(Circular orthogonal ensemble) 考虑的是 $O(n)$ 群以及上的Haar测度;
- CSE(Circular symplectic ensemble) 考虑的是 $U(2n)/Sp(n)$ 群以及上的Haar测度。

## 经典随机矩阵模型二：密度函数

对于CUE/COE/CSE矩阵，均满足 $HH^* = I$ ，所以它们的特征根均在单位圆上分布。令 $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ 为CUE/COE/CSE的特征根，通过计算Haar测度，它们的联合密度函数为

$$J(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{C_{\beta,n}} \prod_{i < j} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_i}|^\beta,$$

其中 $C_{\beta,n} = (2\pi)^n \frac{\Gamma(1+\beta n/2)}{(\Gamma(1+\beta/2))^n}$ 是归一化常数，同样可以由Selberg积分计算得出。 $\beta = 1$ 对应于COE， $\beta = 2$ 对应于CUE， $\beta = 4$ 对应于CSE。

# 核物理中应用

在核物理里，Wigner用随机矩阵来模拟原子核的谱的特征，他的猜测就是(Wigner surmise)，原子核相邻谱间距的分布和随机矩阵模型的谱间距分布相吻合。

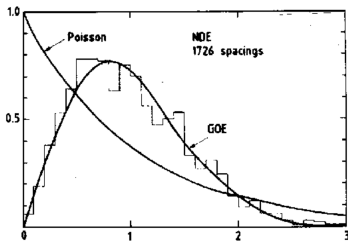


Figure: 折线为某原子核的谱间距，曲线为GOE的谱间距

# 数论中应用

- 在数论领域，黎曼zeta函数零点的统计性质和GUE/CUE有着奇妙的一致性，随机矩阵的统计性质，可以用来猜测黎曼zeta函数零点的统计性质。

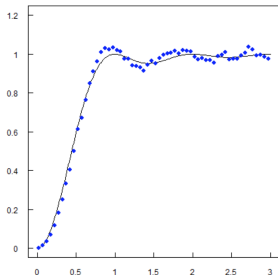


Figure: 黎曼zeta函数零点的两点关联函数和GUE的两点关联函数的比较，其中曲线称为sine kernel，即zeta函数零点的Montgomery-Dyson猜想

## 经典结果：半圆律(semicircle law)

用计算机模拟GUE/GOE/GSE的特征值分布，得到的图像和半圆律是渐进的。

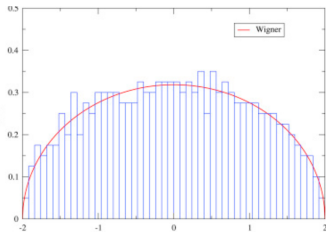


Figure: GUE特征根分布

# 经典结果：半圆律(semicircle law)

并且可以数学上严格证明，特征根的点分布几乎处处渐进于半圆律：

$$\frac{1}{n} \sum_j \delta_{\lambda_j}(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}|_{[-2,2]}, \quad n \rightarrow \infty,$$

以上收敛为弱收敛，即给定任意一个具有紧支集的光滑函数 $\phi$ ，我们有几乎处处收敛，

$$\frac{1}{n} \sum_j \phi(\lambda_j) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \phi(x) \sqrt{4-x^2} dx.$$

# 经典结果：平均谱间距问题

- 除了特征根的整体分布，随机矩阵中最重要的问题是特征根的局部信息，例如谱间距问题。
- 平均谱间距问题: 令 $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ 为随机矩阵GUE的 $n$ 个特征根，令 $s = (\lambda_{j+1} - \lambda_j)/\langle s \rangle$ ，其中 $\langle s \rangle = \langle \lambda_{j+1} - \lambda_j \rangle$ 是平均间距，则 $n \rightarrow \infty$ 时，随机变量 $s$ (平均谱间距)满足，

$$\mathbb{P}(s > t) = \int_t^{+\infty} \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4}{\pi} s^2} ds.$$

- 对于GOE和GSE，也有类似的结果。

# 最新结果：极值谱间距一（圆周小间距）

除了平均谱间距，另一个重要问题是特征根的极大/极小间距。

- 极小间距（圆系综情形）：令  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$  为CUE/COE/CSE的特征根， $\theta_1 < \dots < \theta_n$ ，考虑  $n$  个间距  $\theta_{i+1} - \theta_i, i = 1, \dots, n$ ，令

$$s_{min} = \min_{1 \leq i \leq n} \{\theta_{i+1} - \theta_i\},$$

Feng-Wei证明了， $s_{min}$ 的阶数为  $n^{-\frac{\beta+2}{\beta+1}}$ ，并且当  $n$  趋近于无穷的时候， $\tilde{s}_{min} = s_{min} \times n^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}$  的密度函数为

$$(\beta + 1)x^\beta e^{-x^{\beta+1}}.$$

其中  $\beta = 1$  对应COE， $\beta = 2$  对应CUE， $\beta = 4$  对应CSE。



## 最新结果：极值谱间距二（高斯小间距）

除了圆系综，还可以考虑高斯情形。

- 对于GUE的情形，Ben Arous-Bourgade（Annals of Probability, 13'）得到了最小间距的分布函数，并且在 $n$ 趋近于无穷的时候，分布函数和CUE的情况一致。
- 在我们最近的文章中，Feng-Tian-Wei证明了,当 $n$ 趋近于无穷时，GOE的最小间距分布和COE是一致的。
- GOE的情况比GUE困难很多，主要在于GUE是行列式点过程，从而所有关联函数有具体表达，而GOE的关联函数只有积分形式，但是我们可以通过GOE本身具有的Pfaffian结构得到关联函数的积分上下界估计，从而克服了困难。

## 最新结果：极值谱间距三（大间距）

相对于最小间距问题，最大间距问题非常困难，现在仅对CUE的情况进行说明，GUE情况类似。

- 极大间距：令  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$  为CUE的特征根，令

$$s_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\theta_{i+1} - \theta_i\},$$

Ben Arous-Bourgade (13') 首先证明  $s_{max}$  的阶数为  $\sqrt{32 \log n}/n$ ,  
Feng-Wei 进一步得到了  $s_{max}$  的涨落，令

$$\tilde{s}_{max} = (2 \log n)^{1/2} (ns_{min} - (32 \log n)^{1/2})/4 - (3/8) \log(2 \log n),$$

则  $\tilde{s}_{max}$  的密度函数为Gumbel分布(c为常数),

$$e^{c-x} e^{-e^{c-x}}.$$

- 一个非常重要的问题是，COE/GOE和CSE/GSE特征根极大间距的阶数以及涨落是多少？这个问题完全未知。

- 1 Sachdev-Ye-Kitaev模型概述
- 2 随机矩阵
- 3 SYK主要结果和问题

# 一般SYK模型

- 我们可以进一步定义 $q$ 个Majorana费米子相互作用的，更一般的SYK模型为，

$$H = i^{q/2} \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{q}}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n} J_{i_1 i_2 \dots i_q} \psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots \psi_{i_q}$$

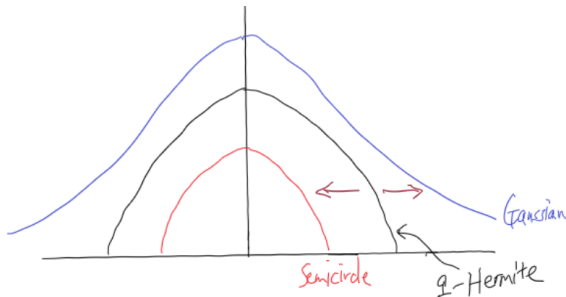
$\psi_1, \dots, \psi_n$ 是Majorana费米子,  $J_{i_1 i_2 \dots i_q}$  是标准高斯随机变量。

- 可以证明,  $H$ 是厄米矩阵, 故特征根为实数。
- $q = 2$ 为SY模型;  $q = 4$ 为SYK标准模型。

# 主要结果一

当 $n \rightarrow \infty$ 时，我们首先得到了SYK模型的谱分布的密度函数，并且证明，SYK的谱分布存在相变。

- 中间黑色曲线为 $q^2/n \rightarrow a \in (0, +\infty)$ 时的谱分布( $q$ -Hermite分布)
- 当 $a \rightarrow 0$ 时(例如经典情况中 $q = 2, 4$ )，黑色曲线趋近于蓝色曲线，为高斯分布
- 当 $a \rightarrow +\infty$ 时，黑色曲线趋近于红色曲线，为半圆率(semicircle)



## 主要结果二

进一步,

- 我们证明了SYK模型谱的线性统计量的中心极限定理。
- 在 $q=2$ 的时候(SY模型), 我们证明了大偏差理论; 对于一般的 $q$ , 我们得到了测度集中理论。

# 一个有趣的数值结果

- Bott周期律:

$N_\chi \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
qdim	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$
lev. stat.	GOE	GOE	GUE	GSE	GSE	GSE	GUE	GOE
$Cl_{0, N_\chi - 1}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$

Figure: eight-fold way

- 按照Bott周期(上面图片最后一行), 在mod 8意义下, Clifford代数分别对应有复表示, 实表示和四元数表示。那么一个自然的预测就是, 经典SYK模型( $q = 4$ )的局部谱分布在mod 8意义下分别对应着GUE, GOE和GSE的局部谱分布。这个已经被数值结果证明, 一个SYK模型蕴含了三个经典随机矩阵模型! 但这个结果并没有任何理论上的证明。接下来, 我们将展示这个数值结果。

# 谱间距数值结果

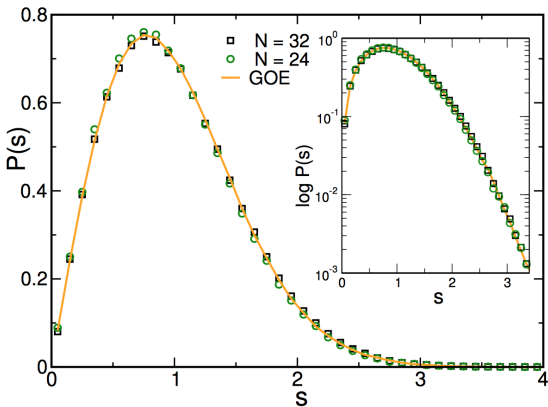


Figure: SYK ( $n = 24, 32, q = 4$ ) 和GOE的谱间距比较



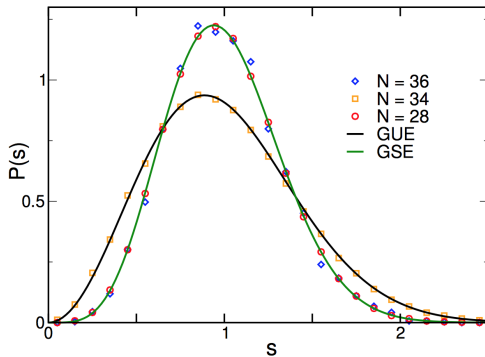


Figure: SYK ( $n = 28, 34, 36, q = 4$ )和GUE, GSE的谱间距比较

# 谢谢!