Talk on Harmonic Analysis and PDEs, Sichuan University, China

调和分析中的四大猜想及其相关的著名猜想

苗长兴

北京应用物理与计算数学研究所

April 12, 2018

四个基本问题

- 波动方程解的先验估计：寻求合适的时空空间，建立线性波动方程解的时空估计. $\Longrightarrow$ 局部光滑性猜想.
- 经典Fourier级数求和的L^p收敛性：对任意的$\delta > 0$，寻求合适的可积指标p,使得乘子算子T
$$Tf = \left[\mathcal{F}^{-1}(m_\delta(\xi))\hat{f}(\xi)\right](x), \quad m_\delta(\xi) = \left(1 - |\xi|^2\right)_+^\delta$$
是$L^p(R^d)$上的有界算子. $\Longrightarrow$ **Bochner-Riesz猜想**.
- 振荡积分理论：对于$f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}(\xi)$ 在具非零Gauss曲率的光滑超曲面 S上的限制是否有意义？$\Longrightarrow$ 限制性猜想.
- Kakeya问题：Besicovitch在解决Kakeya“旋针”问题过程中，构造了具有零测度的Besicovitch 集合($\mathbb{R}^d$中含任意方向单位线段的集合). $\Longrightarrow$ **Kakeya猜想**.

上述猜想表面上源于不同数学问题(PDE、Fourier求和、振荡积分、几何测度论)，实则密切相关. 粗略来看这4个猜想或许是同一个核心问题在不同数学研究领域的表现形式.

Conjecture 0.1 (局部光滑性猜想-四大猜想之一)

设$u(t,x)$是自由波动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} \Box u(t,x)=0, \quad \Box=\partial_t^2-\Delta, \\ u(0,x)=f(x), \quad u_t(0,x)=0 \end{cases} \tag{0.1}$$

的解，则对于所有的$\varepsilon>0$,有

$$\left\|u\right\|_{L^p([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \left\|(1+\sqrt{-\Delta})^\varepsilon f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad p=\frac{2d}{d-1}. \tag{0.2}$$

Conjecture 0.2 (局部光滑性猜想-相关猜想)

- 紧流形上波动方程对应的局部光滑性猜想(离散版本).
- Fourier积分算子的局部光滑性猜想(普适版本).
- 局部光滑性猜想在锥形超曲面上的Radon变换形式(共轭版本).

Conjecture 0.3 (Bochner-Riesz猜想-四大猜想之二)

设$d \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,定义Bochner-Riesz平均如下

$$S^\delta f(x) = (1+\Delta)_+^\delta f(x), \ \widehat{S^\delta f}(\xi) \triangleq (1-|\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi).$$

Bochner-Riesz猜想: $\|S^\delta f\|_p \lesssim \|f\|_p$ 成立的充要条件是

$$\delta > \delta_p \triangleq \max\left(0, d\left|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{p}\right|-\tfrac{1}{2}\right), \ \text{or} \ (\delta, p) = (0, 2). \tag{0.3}$$

Conjecture 0.4 (相关猜想1-球面极大Bochner-Riesz猜想)

设$d \geqslant 2$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $R > 0$, 定义Bochner-Riesz平均如下

$$\widehat{S_R^\delta f}(\xi) \triangleq \left(1-\left|\tfrac{\xi}{R}\right|^2\right)_+^\delta \hat{f}(\xi). \tag{0.4}$$

极大Bochner-Riesz猜想: $\left\|\sup_{R>0} |S_R^\delta f|\right\|_p \lesssim \|f\|_p$ 的充要条件是(0.3).

对某些$1 < p < 2$,极大Bochner-Riesz猜想失败!

极大Bochner-Riesz弱型估计(Tao IMJ 47(1998)): 设$1 < p < 2$,则

$$\left\|\sup_{R>0} |S_R^\delta f|\right\|_{p,\infty} \lesssim \|f\|_p \iff \delta > 0 \text{ 及 } \delta \geqslant \frac{2d-1}{2p} - \frac{d}{2}.$$

Conjecture 0.5 (相关猜想2-抛物(极大)Bochner-Riesz猜想)

设$d \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\delta > 0$, 定义

$$\widehat{\tilde{S}^\delta f}(\underline{\xi}, \xi_d) \triangleq \eta(\xi)\left(\xi_d - \tfrac{1}{2}|\underline{\xi}|^2\right)_+^\delta \hat{f}(\underline{\xi}, \xi_d), \quad (\underline{\xi}, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R},$$

这里$\eta(\xi)$是具有紧支的光滑函数. **抛物(极大)Bochner-Riesz猜想**:

$$\|\tilde{S}^\delta f\|_p \lesssim \|f\|_p \quad (\text{或} \quad \Big\|\sup_{R>0} |\tilde{S}_R^\delta f|\Big\|_p \lesssim \|f\|_p, \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty)$$

成立的充要条件是$\delta > \delta_p$或$(\delta, p) = (0, 2)$.

Conjecture 0.6 (Bochner-Riesz猜想-其它相关猜想*)**

- 与紧光滑流形上对应的离散性Bochner-Riesz猜想.
- 设$P(x, D) \in \Psi_{cl}^1(M)$是$L^2(M)$上的正定自伴算子, 与该拟微分算子对应的Bochner-Riesz猜想.

Conjecture 0.7 (限制性猜想-四大猜想之三)

设S是$\mathbb{R}^d$中具非零Gauss曲率的紧致超曲面($\mathbb{R}^d$中的零测集,如球面或横截抛物面). 对任意$f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 限制性猜想

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \iff p' > \tfrac{2d}{d-1},\ p' \geqslant \tfrac{d+1}{d-1} q. \tag{0.5}$$

或等价形式(Mattila的书或苗长兴讲义)

$$\|\hat{f}\|_{L^p(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \iff 1 \leqslant p < \tfrac{2d}{d+1}. \tag{0.6}$$

Conjecture 0.8 (限制性猜想-相关猜想)

- 紧光滑流形对应的离散限制性猜想.
- 光滑紧流形上自伴算子特征函数的L^p控制估计猜想.
- Hardy-Littlewood 控制性猜想(单列讨论).

Conjecture 0.9 (Kakeya猜想-四大猜想之四)

$\mathbb{R}^d$中包含任意方向单位线段的零测度集E称为Kakeya集. **Kakeya猜想** 所有Kakeya集的Minkowski维数或Haudroff维数为d.

Conjecture 0.10 (相关猜想-Kakeya极大函数猜想)

设f是具有紧支的光滑函数, $0 < \delta \ll 1$.定义单位球面上的Kakeya极大函数

$$f_\delta^*(\omega) \triangleq \sup_{T//\omega} \frac{1}{|T|} \int_T f(x)dx, \quad T \text{ 是所有平行 } \omega \text{ 的 } 1 \times \delta \text{ 型tube.} \tag{0.7}$$

用$\mathcal{K}(p,\alpha)$表示如下极大函数估计

$$\|f_\delta^*(\omega)\|_{L^p(d\sigma)} \lesssim \delta^{\frac{d}{p}-1-\alpha}\|f\|_p. \tag{0.8}$$

Kakeya极大函数猜想: 对所有的$1 \leqslant p \leqslant d$与$\forall \alpha > 0$, 均有$\mathcal{K}(p,\alpha)$.

推论: $\mathcal{K}(p,\alpha) \Longrightarrow$Kakeya集的维数$\geqslant p$. $p = d$对应**Kakeya猜想**.

Conjecture 0.11 (相关猜想-Nikodym猜想)

称零测集$E \subset \mathbb{R}^d$为Nikodym集，如果对任意$x \in \mathbb{R}^d$，总存在过x的直线ℓ_x满足$E \cap \ell_x$包含一个单位线段. **Nikodym猜想:** $\mathbb{R}^d$中所有Nikodym集E的Minkowski维数为d(Haudroff维数为d).

Conjecture 0.12 (相关猜想-Nikodym极大函数猜想)

设f是具有紧支的光滑函数，$0 < \delta \ll 1$. 定义$\mathbb{R}^d$上的Nikodym极大函数

$$f_\delta^{**}(x) \triangleq \sup_{x \in T} \frac{1}{|T|} \int_T f(y)dy, \quad T \text{ 是所有包含 } x \text{ 的 } 1 \times \delta \text{ 型tube.} \tag{0.9}$$

用$\mathcal{N}(p, \alpha)$表示如下极大函数估计

$$\|f_\delta^{**}(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \delta^{\frac{d}{p}-1-\alpha} \|f\|_p. \tag{0.10}$$

Nikodym极大函数猜想: 对所有的$1 \leqslant p \leqslant d$与$\forall \alpha > 0$，均有$\mathcal{N}(p, \alpha)$.

推论: $\mathcal{N}(p, \alpha)$意味着Nikodym集的维数起码为p.

Conjecture 0.13 (Keleti扩张猜想)

设A是$\mathbb{R}^d$中一簇线段的并,B是相应的延长直线集合,则$\dim A = \dim B$.

- $d = 2$对应的扩张猜想已经解决,高维情形是公开的;
- 扩张猜想意味着$dim_P B = d$(Packing维数对应的Kakeya猜想).

Conjecture 0.14 (相关猜想-Montgomery猜想)

设$T \leqslant N^2$, $a_k \in \mathbb{C}$满足$|a_k| \leqslant 1$, 考虑Dirichlet级数的求和问题

$$D(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k k^{it}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{Dirichlet求和}).$$

Montgomery猜想 对于任意的可测集$E \subset [0, T]$,则

$$\int_E |D(t)|^2 dt \lesssim N^{1+\varepsilon}(N + \mathcal{L}^1(E)), \ \mathcal{L}^1 \text{ 表示Lebesque测度}. \tag{0.11}$$

- Bourgain (1993)证明Montgomery猜想意味着Kakeya猜想;
- Wolff (2003)证明Montgomery猜想意味着极大Kakeya猜想.

Conjecture 0.15 (相关猜想-超曲面S上分离性(decoupling)猜想)

设S是$\mathbb{R}^d$中紧的C^2光滑超曲面，具有正定的二次基本形式，S_δ表示S的δ邻域，P_δ是其有限重覆盖,满足

$$S_\delta \subset P_\delta \triangleq \cup\tau,\quad \tau \text{ 表示形如 } \sqrt{\delta}\times\cdots\sqrt{\delta}\times\delta \text{ 长方体}.$$

假设$\mathrm{supp}\hat{f}\subset S_\delta$,则

$$\begin{cases} \|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\frac{d-1}{4}+\frac{d+1}{2p}-\varepsilon}\Big\|\Big(\sum\limits_{\tau\in P_\delta}|f_\tau|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p, & \forall p\geqslant \frac{2(d+1)}{d-1}, \\ \|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}\Big\|\Big(\sum\limits_{\tau\in P_\delta}|f_\tau|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p, \ (\text{插值}L^2\text{估计}) & \forall 2\leqslant p\leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}. \end{cases} \tag{0.12}$$

这里$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $f_\tau=(\hat{f}\big|_\tau)^\vee$是$f$的Fourier变换在$\tau$上的限制.

- Bourgain-Demeter (2015)证明**弱型的分离性(decoupling)猜想**:

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\frac{d-1}{4}+\frac{d+1}{2p}-\varepsilon}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^2\Big)^{1/2},\quad \forall p\geqslant\frac{2(d+1)}{d-1}.$$

与平凡的L^2估计插值,就得$2\leqslant p\leqslant\frac{2(d+1)}{d-1}$情形下对应的估计.

Conjecture 0.16 (Szemerédi定理与相关猜想)

Roth定理(1953) 设$A \subset \mathbb{Z}$具有正上确定密度,即

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A\cap[-N,N])}{2N} > 0. \tag{0.13}$$

则A含无限多3-等差序列$\{a, a+r, a+2r\}$,其中$a \in \mathbb{Z}$, $r > 0$.

- **调和分析方法**(Roth,菲尔兹奖得主)
- **组合数学方法**(Szemerédi, Abel奖得主).
- **遍历理论方法**(Furstenberg, Wolf奖得主).
- **堆垒数论方法**(Gowers, 菲尔兹奖得主).

■ $\mathbb{Z}$中k-等差序列对应的结果称为**Szemerédi定理**,该定理的高维版本由Furstenberg, Katznelson, Gowers证明, 导致**Bourgain**的算术方法!

■ Green-**Tao**证明在素数类中的相应版本!

■ **Bourgain** 证明了$\mathbb{R}^d$具有正Lebesgue密度集E包含无限多非退化几何构型顶点. 退化情形存在许多公开问题......

$A \subset \mathbb{R}^d$定义的“距离”-集合: $D(A) = \{|x-y| : x, y \in A\} \subset [0, \infty)$.

Conjecture 0.17 (Falconer的“距离-集合”猜想)

设$d \geqslant 2$, $A \subset \mathbb{R}^d$是一个Borel集合,其Hausdorff维数$\dim(A) > d/2$,则

$$\mathcal{L}^1(D(A)) > 0 \text{ 或 } \mathrm{Int}(D(A)) \neq \emptyset.$$

目前的研究进展如下:

- 如果$\dim(A) > \frac{d+1}{2}$,则$\mathrm{Int}(D(A)) \neq \emptyset$
- 如果$\frac{d-1}{2} \leqslant \dim(A) \leqslant \frac{d+1}{2}$,则$\dim(D(A)) \geqslant \dim(A) - \frac{d-1}{2}$.

Conjecture 0.18 (Falconer的弱“距离-集合”猜想)

设$d \geqslant 2$, $A \subset \mathbb{R}^d$是一个Borel集合,其Hausdorff维数$\dim(A) > d/2$,则

$$\dim(D(A)) = 1.$$

Conjecture 0.19 (单位距离猜想)

平面上N个点所能决定的单位线段的个数$\lesssim_\varepsilon N^{1+\varepsilon}$.

Conjecture 0.20 (点态收敛猜想)

Conjecture 0.21 (Conjecture on unique continuation property)

Conjecture 0.22 (Riemann 猜想)

Conjecture 0.23 (Lindelöf-猜想-弱型-Riemann猜想)

:

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+ti)=O(t^{\varepsilon}),\quad ;t\longrightarrow\infty.$$

Conjecture 0.24 (Gauss circle 猜想)

$$S_2(n)=\pi n+O(n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}).\quad\left(\quad S_2(n)=\pi n+O(n^{\frac{1}{2}})\quad\right)$$

Conjecture 0.25 (丢番图不等式整数解的个数估计)

Local smoothing

$\Downarrow$

maximal Bochner-Riesz

$\Downarrow$

spherical Bochner-Riesz

$\Downarrow$

spherical restriction

$\Downarrow$

parabolic restriction $\Longleftrightarrow$ **parabolic Bochner-Riesz**

$\Downarrow$

maximal Kakeya $\Longleftrightarrow$ **maximal Nikodym**

$\Downarrow$

Kakeya set

$\Downarrow$

Nikodym set

Figure: Known relations of 4-famous conjectures

Local Smoothing Conjecture

利用Euler公式及Duhamel 原理,线性波动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} \Box u(t,x) = g(t,x), \quad \Box = \partial_t^2 - \Delta, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

解的先验估计可归结为半波算子解$e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)$的相应估计.

- ★ $u(t) \triangleq e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)$对应的能量估计:

$$\|\nabla^k u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\nabla^k f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ k \geqslant 0. \tag{1.2}$$

L^2范数所刻画的能量估计,**无法展示$u(t) = e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)$ 在物理空间中的“聚积”或“弥散”**,这些性质需要L^p估计来刻画($p > 2$).

- ★ 半波算子对应的核函数K_t: 对于$d \geqslant 3$, K_t不是通常函数,仅是分布!然而,积分有限次之后就变成通常之函数,且具如下衰减:

$$\|(1+\sqrt{-\Delta})^{-\frac{d+1}{2}-\varepsilon}K_t\|_\infty \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}, \quad \forall t \neq 0. \tag{1.3}$$

事实上,还可推出更精确的点态估计(见Shatah-Struwe的专著):

$$\begin{cases} \|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}\||\nabla|^{\frac{d+1}{2}}f\|_{L^1_x}, \ \forall t \neq 0, \quad d \geqslant 3 \text{ 是奇数} \\ \|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}\||\nabla|^{\frac{d+1}{2}}f\|_{\dot{B}^0_{1,1}}, \ \forall t \neq 0, \quad d \geqslant 2 \text{ 是偶数} \end{cases} \tag{1.4}$$

通过与能量估计插值, 就导出**Peral-型$L^{p'} - L^p$估计**:

$$\begin{cases} \|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^p_x} \lesssim t^{-\gamma(p)}\||\nabla|^{(d+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}f\|_{L^{p'}_x}, \quad t \neq 0, \\ \gamma(p) \triangleq (d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}), \ \forall 2 \leqslant p \leqslant \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

★ 选择"聚积" 型反例$f(x)$: 满足$\mathrm{supp} f = \{x : \ |x| = 1 + O(\delta)\}$. 容易验证, 当$t \sim 1 + O(\delta)$时,

$$|e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)| \gg 1, \quad x \in B_\delta(0).$$

该反例表明, Peral-型$L^{p'}$-L^p估计是sharp的, 然而具相当高的正则性损失. 该估计在应用上具有局限性,例如:不适合低正则问题的研究.

★ 从物理上来讲，导数损失的原因源于波的“聚积”，即使初值具有充分小的L^1范数，也会产生充分大的L^∞范数！但是，**波在某处“聚积”的时间应是短暂的(不会滞留太长的时间). 为了刻画或发现正则性的损失,引入并采用时间的平均**

$$\Big(\int_1^2 \|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_p^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$

估计来代替关于固定时刻的估计.这类时空估计统称为“local smoothing estimate”.

★ Strichartz率先建立一类整体时空估计，经Ginibre-Velo等数学家的努力，Keel-Tao最终实现端点Strichartz估计的证明，从而完善了**Strichartz型估计:**

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^q(\mathbb{R};L^r(\mathbb{R}^d))} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s_x}, \tag{1.6}$$

这里

$$\begin{cases} \delta(r)-\frac{1}{q}=s, \quad \delta(r)\triangleq d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}), \ \ (\text{scaling条件}), \\ \frac{2}{q}\leqslant\gamma(r),\ \gamma(r)\triangleq(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}),\ (\text{Knapp条件}). \end{cases} \tag{1.7}$$

作为特款，我们有**Strichartz估计的原始形式**

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}_x}, \quad d=3. \tag{1.8}$$

★ Knapp条件并不取决于“聚积” 反例，而由Knapp例子或“行波”型反例来决定. 具体地说，对于$0<\delta\ll 1$，选择$f(x)$满足

$$\mathrm{supp} f = \{(x_1,x')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}:\ |x_1|\lesssim\delta^2, |x'|\lesssim\delta\}$$

这样，当$t\lesssim 1$时，自由波$e^{it\sqrt{-\Delta}}f$ 在平移的“扁圆柱”

$$\{(x_1,x')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}:\ |x_1-t|\lesssim\delta^2, |x'|\lesssim\delta\}$$

上就很大；当$t\gtrsim 1$时，波$e^{it\sqrt{-\Delta}}f$开始产生“弥散”现象. 详见苗长兴、张波专著《偏微分方程的调和分析方法》.

★ Strichartz估计在非线性波动方程研究中举足轻重. 鉴于正则性损失的存在、左右两端具有不同的可积性等，它并非研究低正则解的理想工具！期望有**“聚积” 型反例及Knapp反例来测试其sharp型的$L^p_x - L^p_{t,x}$ 型估计**.

★ Sogge猜想该理想估计应该是

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}_{t,x}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}_x(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.9}$$

它与能量估计插值可以获得其他已知估计, 不幸的是该理想估计是错误的. 然而,可能仅有一点误差. 即

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}_{t,x}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|(1+\sqrt{-\Delta})^{\varepsilon}f\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}_x(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{1.10}$$

这就对应着**Sogge的局部光滑性猜想**. 对于

$$u(t) = \cos(\sqrt{-\Delta}t)\varphi + \frac{\sin(\sqrt{-\Delta}t)}{\sqrt{\Delta}}\psi, \quad (\text{自由波方程的解})$$

相应的局部光滑性猜想可表现为

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{L^p_{t,x}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\varphi\|_{L^p_\delta(\mathbb{R}^d)} + \|\psi\|_{L^p_{\delta-1}(\mathbb{R}^d)}, \\ \forall\, \delta > \delta_p = d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}, \quad p \geqslant \frac{2d}{d-1}. \end{cases} \tag{1.11}$$

该猜想与球面极大函数的L^p估计、Bochner-Riesz猜想密切相关!

★ local smoothing conjecture极其困难，即使$d=2$的情形也是如此，主要进展如下:

(i) Mockenhaupt(1998)在$d=2, \varepsilon>\frac{1}{8}$情形下，证明(1.10).

(ii) Bourgain、Vargas-Tao(1998-1999)，利用Wolff关于锥上的限制性估计，将Mockenhaupt的结果改进到$\varepsilon>\frac{5}{44}$.

(iii) 高维情形的最新进展,参考Bourgain-Demeter, The proof of the ℓ^2 decoupling conjecture, Ann. Math.182(2015) 351-389，中关于局部光滑效应的最新进展.

■ local smoothing conjecture出现导数损失是必然的，Wolff (1999)给出了意义深远的解释. 根据$\mathbb{R}^d$上**具有0测度Besicovitch集的离散化**,即: 仅考虑δ-分离方向的集合,构造厚度为δ的$1\times\delta$的tube集合

$$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\cdots, \mathbf{T}_M, \quad M\sim\delta^{1-d}, \quad \omega_j \triangleq \mathbf{T}_j\text{的方向}$$

满足

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^M T_j\Big)\sim\frac{\log\log(1/\delta)}{\log(1/\delta)}\longrightarrow 0, \quad \delta\longrightarrow 0.$$

充分说明**这些tube**具有充分的重叠性！

- 令$\tilde{T}_j \triangleq T_j - \omega_j$(后向进行单位平移). 精心构造的Besicovicth集合(重排等)确保平移后的tube集$\{\tilde{T}_j\}$互不相交的. 通过“波列”构造初始函数f如下

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\delta^{1-d}} e^{i\delta^{-2}x\cdot\omega_j}\chi_{\tilde{T}_j}(x), \quad e^{i\delta^{-2}x\cdot\omega_j}\chi_{\tilde{T}_j}(x) \triangleq \text{“波列”}$$

事实上, 每个“波列”大约是δ^{-2}个Knapp函数拼凑而成. 直接计算可见

$$e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x) = \sum_{j=1}^{\delta^{1-d}} e^{i\delta^{-2}(x-t\omega_j)\cdot\omega_j}\chi_{\tilde{T}_j+t\omega_j}(x).$$

对于$t\in[1,2]$, $e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)$的功能本质上是将“波列”从$\tilde{T}_j$移动到T_j,注意到$\{T_j\}$充分重叠而$\{\tilde{T}_j\}$互不相交的事实, 推知

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\, p>2$$

从$t=0$到$t\in[1,2]$ 一定急速增加,从而说明**理想local smothing conjecture**(没有正则性损失)是不存在的.

Conic Radon Restriction Conjecture

- **锥面上Radon变换**. 设$f(x,t)$是$\mathbb{R}^{d+1}$上具有紧支集的函数，锥面上的Radon变换$\mathcal{R}(f)$定义如下:

$$\mathcal{R}(f)(\omega,s)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x,s+\langle\omega,x\rangle)dx,\ \ \omega\in S^{d-1},\ s\in\mathbb{R}.$$

- **锥上Radon变换型限制猜想**. 通过线性化Sogge型局部光滑性猜想

$$\|e^{it\sqrt{-\Delta}}\varphi\|_{L^p([1,2]\times\mathbb{R}^d)}\lesssim\|\varphi\|_{L^p_\delta(\mathbb{R}^d)},\ \delta>\delta_p,\ p\geqslant 2, \tag{1.12}$$

的adjoint形式,**锥面上Radon变换型限制猜想**:

$$\left\|\mathcal{R}f\right\|_{L^{p'}([-1,1]\times S^{d-1})}\lesssim\left\|f\right\|_{L^{p'}_\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)},\ \forall\, p\geqslant\frac{2d}{d-1},\ \alpha>-\frac{d}{p}. \tag{1.13}$$

- **锥上Radon变换型限制猜想$\Longrightarrow$限制性估计**. 对$\frac{2d}{d-1}\leqslant p_0<\infty$,设(1.13)对所有的$\alpha>-d/p_0$成立，则有**球面上的限制性猜想**:

$$\left\|\widehat{\varphi}|_{S^{d-1}}\right\|_p\lesssim\left\|\varphi\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\ \forall\, 1\leqslant p<p_0'. \tag{1.14}$$

Bochner-Riesz Conjecture

★ Fourier求和或Fourier逆变换. 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, 考虑

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{|\xi|<R} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} dx \longrightarrow f(x), \quad R \longrightarrow \infty \tag{2.1}$$

在什么意义下收敛问题? 容易验证它在缓增分布意义下收敛,但并非一致收敛! **公开问题: L^p意义下(2.1)的收敛性如何?**

★ L^p意义下的收敛性就归结为"圆盘乘子" S_R^0(或S^0)的(p,p) 有界性, 这里

$$\widehat{S_R^0 f}(\xi) = \chi_{|\xi|<R}(\xi)\hat{f}(\xi), \quad \text{or} \quad \widehat{S^0 f}(\xi) = \chi_{|\xi|<1}(\xi)\hat{f}(\xi).$$

经典结果: 当$p=2$时, S_R^0是L^2 上的有界算子; 当$d=1$时,Riesz变换的(p,p)有界性就圆满地回答了上述问题.

■ 对于$d \geqslant 2$的情形, Fourier乘子 $\widehat{S_R^0} = \chi_R(\xi)$的奇点集是一个超曲面, S_R^0是否保持L^p有界? Fefferman(1971)证明: 乘子型算子S_R^0 或S^0 在L^p上有界的充要条件是$p=2$. 这就对应着**著名的圆盘猜想**.

- **圆盘猜想证明梗概**: 基于Besicovitch集合的构造理念,可以给出圆盘猜想的粗糙证明: 构造具有不同方向、尺度为$N^2 \times N$ tube集合

$$\mathcal{R} = \left\{ R_j \middle| \, |R_j| = N^2 \times N, \quad R_j \cap R_k = \varnothing, \quad j \neq k \right\}$$

满足$\{\tilde{R}_j = R_j + N^2\omega_j\}_j$具有充分的重叠性. 在每个$R_j$上构造"wave packet" $\psi_j(x)$ 使得在$\tilde{R}_j$子集上$S^0\psi_j \sim 1$(1/3-$\tilde{R}_j$的tube),这样

$$f = \sum_{R_j} \psi_j, \quad \Longrightarrow \|S^0 f(x)\|_p \gg 1, \quad p > 2. \quad \big(p < 2 \text{ 对偶方法}\big).$$

★ 为了弥补这一缺陷, 引入**球面Bochner-Riesz 平均**, 即:

$$S_R^\delta \triangleq (1 - |D|^2/R^2)_+^\delta, \quad \widehat{S_R^\delta f}(\xi) \triangleq (1 - |\xi|^2/R^2)_+^\delta \hat{f}(\xi). \tag{2.2}$$

容易看出: $\delta > 0$越大,相应的乘子越光滑. 同时,读者也将体会到极大Bochner-Riesz平均算子:

$$\widehat{S_*^\delta f}(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \left| S_\lambda^\delta f(x) \right|, \quad \big(\text{研究(2.1)的点态收敛}\big) \tag{2.3}$$

是研究局部光滑估计与Bochner-Riesz平均算子估计之桥梁.

★ Herz 观察到S^δ的核函数具有如下渐近表示式

$$K_\delta(x) = \frac{\Gamma(1+\delta)}{\pi^\delta |x|^{\frac{d}{2}-\delta}} J_{\frac{d}{2}+\delta}(2\pi|x|) \sim \frac{e^{\pm 2\pi i|x|}}{|x|^{\frac{d+1}{2}+\delta}}, \quad |x| \gg 1. \tag{2.4}$$

结合 Fefferman 的工作，不难看出

$$\|S^\delta f\|_p \lesssim \|f\|_p, \quad \big(\text{scaling意味着：} \|S_R^\delta f\|_p \lesssim \|f\|_p\big). \tag{2.5}$$

成立的必要条件应为

$$\delta > \delta_p \triangleq \max\left(0, d\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| - \frac{1}{2}\right), \quad \text{or} \quad (\delta, p) = (0,2). \tag{2.6}$$

Bochner-Riesz 猜想是指：条件(2.6)是**Bochner-Riesz**算子S^δ 是L^p有界的充要条件. **Bochner-Riesz**猜想的**临界指标版本**可表述为:

$$\|S^\delta f\|_{\frac{2d}{d-1}} \lesssim \|f\|_{\frac{2d}{d-1}}, \quad \forall\, \delta > 0. \tag{2.7}$$

Theorem 2.1 (经典Bochner-Riesz估计)

$$p \in \left[1, \tfrac{2(d+1)}{d+3}\right] \cup \left[\tfrac{2(d+1)}{d-1}, \infty\right] \text{ 且 } \delta > \delta_p \implies \|S^\delta f\|_p \lesssim \|f\|_p. \tag{2.8}$$

Remarks 1 (归结与证明思路)

- $\delta_p > 0$等价于$p \notin [\frac{2d}{d+1}, \frac{2d}{d-1}]$,体现定理2.1与猜想的关系.
- 定理2.1的条件也可以表述为

$$\frac{2d}{d+1+2\delta} < p < \frac{2d}{d-1-2\delta}, \quad \text{且} \quad \delta > \frac{d-1}{2(d+1)}. \tag{2.9}$$

- 当$\delta > \frac{d-1}{2}$时，核函数$K^\delta(x) \in L^1$. 这意味着$\|S^\delta f\|_p \lesssim \|f\|_p$.
- 利用(2.4),定理2.1就归结于证明振荡积分算子:

$$(G_\lambda f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda|x-y|}\psi(x-y)f(y)dy, \quad \psi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}). \tag{2.10}$$

满足:

$$\|G_\lambda f\|_p \lesssim \lambda^{-d/p'}\|f\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d+3}. \tag{2.11}$$

- **Hörmander型估计**.一般地,用$\mathcal{BR}(p,\delta)$表示Hörmander型估计:

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi iR|x-y|}a(x,y)f(y)dy\right\|_p \lesssim R^{-\frac{d}{p'}+\delta}\|f\|_p, \tag{2.12}$$

这里bump函数a的支集远离$x=y$. 根据Carleson-Sjölin方法、二进分解与对偶性原理, Bochner-Riesz猜想就归结为证明:

$$\mathcal{BR}(p,\delta)\ \text{对所有的}\ 1\leqslant p\leqslant \tfrac{2d}{d+1}\ \text{与}\ \delta>0\ \text{均成立}. \tag{2.13}$$

这也是**Bochner-Riesz猜想的经典研究思路**.

- **局部光滑猜想$\Longrightarrow$Bochner-Riesz猜想**. 注意到

$$S^\varepsilon=(1+\Delta)_+^\varepsilon=\int_{\mathbb{R}} a(t)e^{it\sqrt{-\Delta}}dt,\quad a(t)\sim(1+|t|)^{-1-\varepsilon}. \tag{2.14}$$

利用Hölder 不等式, 我们推知

$$|S^\varepsilon f(x)|\lesssim\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|t|)^{-1-\varepsilon}\left|e^{it\sqrt{-\Delta}}f\right|^{\frac{2d}{d-1}}dt\right)^{\frac{d-1}{2d}}. \tag{2.15}$$

两边关于x取$L^{\frac{2d}{d-1}}$范数, 并利用局部光滑猜想的rescaled形式,就导出Bochner-Riesz猜想.

- **局部光滑猜想$\Longrightarrow$极大Bochner-Riesz猜想**. 利用Hölder不等式, 局部光滑猜想(1.10)意味着:对任意$\varepsilon > 0$,有

$$\left\| \left(\int_{t\sim 1} \left| e^{it\sqrt{-\Delta}}\varphi \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_x^{\frac{2d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \| \langle \sqrt{-\Delta} \rangle^{\varepsilon} \varphi \|_{L_x^{\frac{2d}{d-1}}}. \tag{2.16}$$

借助于scale与P-L 分解, 对任意的$\alpha > \frac{1}{2} + \varepsilon$可以推出

$$\left\| \left(\int \frac{|2^j t|}{(1+|2^j t|)^{\alpha}} \left| e^{it\sqrt{-\Delta}}\varphi \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_x^{\frac{2d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\varphi\|_{L_x^{\frac{2d}{d-1}}}. \tag{2.17}$$

由Plancherel与Cauchy不等式, 对$\tau \sim 2^j$及$\forall m \in L^2_{\alpha}[1/2, 2]$的径向乘子, 有如下点态估计

$$\left| m(D/\tau)\varphi(x) \right| \lesssim \left(\int \frac{|2^j t|}{(1+|2^j t|)^{\alpha}} \left| e^{it\sqrt{-\Delta}}\varphi \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

$$\left\| \sup_{\tau\sim 2^j} \left| S_{\tau}^{\varepsilon+}\varphi \right| \right\|_p \lesssim \|\varphi\|_p, \quad \tilde{m}^{\varepsilon+} \in L^2_{\alpha}([1/2,2], \quad \alpha > \frac{1}{2} + \epsilon. \tag{2.19}$$

$$\widetilde{m}^{\delta}(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^{\delta}, \quad m^{\delta}(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^{\delta} \cdot e_d \text{处的bump函数}.$$

由此推出极大Bochner-Riesz猜想.

- Bochner-Riesz猜想研究异常困难, 即:如何实现

$$p \leqslant \frac{2(d+1)}{d+3} \nearrow p \leqslant \frac{2d}{d+1} \text{ 或 } p' \geqslant \frac{2(d+1)}{d-1} \searrow p' \geqslant \frac{2d}{d-1}.$$

Carleson-Sjölin (1972)当$d=2$时,证明$\mathcal{BR}(p,0)$ $(1 \leqslant p \leqslant 4/3)$. 解决了$d=2$对应的Bochner-Riesz猜想. 但高维猜想是公开的! 当$d=3$时, $p_c = 3/2$或$p_c' = 3$对应着临界情况.研究进展如下:

- Bochner在$p' = \infty$解决了(2.5);
- Fefferman-Stein (1970)对$p' \geqslant 6$证明了(2.5);
- Stein-Tomas (1975)对$p' \geqslant 4$证明了(2.5);
- Bourgain(1991∼)在$p' > 4 - \frac{2}{15}$条件下验证了(2.5);
- Wolff(1995)在$p' > 4 - \frac{2}{11}$条件下验证了(2.5);
- Tao-Vargas(2000)在$p' > 26/7$条件下验证了(2.5);
- Bourgian-Guth(2011)的新方法改进Bochner-Riesz猜想$\cdots\cdots$

■ **离散Bochner-Riesz猜想及其作用**. 设M是紧无边光滑流形, $P(x,D)\in\Psi^1_{c\ell}$是正定自伴算子, $\{\lambda_j\}$表示对应的特征值,$\{e_j\}$是对应的特征函数(法化). 考虑

$$S^\delta_\lambda f(x)=\sum_{\lambda_j\leqslant\lambda}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda}\right)^\delta E_jf,\quad E_jf=\langle f,e_j\rangle e_j.$$

类似于$\mathbb{R}^d$, 当$p\neq 2,\delta\leqslant\delta_p$时,$S^\delta_\lambda$不会在$L^p(M)$上一致有界! 然而, 一定存在一致常数$C_\delta$,对任意的$\lambda>0$, 成立

$$\|S^\delta_\lambda f(x)\|_{L^1(M)}\leqslant C_\delta\|f\|_{L^1(M)},\quad \delta>\frac{d-1}{2}.$$

若记与P关联的余切球面$\Sigma_x=\{\xi:\ p(x,\xi)=1\}\subset T^*_xM\backslash\{0\}$对具有非零的Gauss曲率, 则

$$p\in\left[1,\frac{2(d+1)}{d+3}\right]\cup\left[\frac{2(d+1)}{d-1},\infty\right]\text{ 且 }\delta>\delta_p\ \Rightarrow\ \|S^\delta f\|_{L^p(M)}\lesssim\|f\|_{L^p(M)}.$$

离散Bochner-Riesz猜想: 上面估计成立$\Longleftrightarrow\ \delta>\delta_p$.

该问题涉及**离散限制性估计、微局部分析与PDE、整体调和分析等, 在堆垒数论研究中起重要作用**. **是否利用分离性定理研究该问题也是我们将来考虑的研究方向!**

Restriction Conjecture

- 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，则 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$。从而，Fourier 限制算子 $f \mapsto \hat{f}|_S$ 对任意 $S \subset \mathbb{R}^d$ 都有意义.
- 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 则 $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. 从而, Fourier 限制算子 $f \mapsto \hat{f}|_S$ 对 $S \subset \mathbb{R}^d$ 且 $m_d(S) = 0$ 没有意义.
- 对任何 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 当$1 < p < 2$时,通过分解$f = f_1 + f_2 \in L^1 \oplus L^2$ 定义Fourier 变换. 对于$p > 2$时,$\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$可视为缓增分布的 Fourier 变换.

问题： 对于具非零Gauss曲率的超曲面S ($\mathbb{R}^d$中的零测集,可归结为超曲面上的紧集)及$f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}|_S$ 是否具有确定意义？特别地, **是否存在$1 \leqslant q \leqslant \infty$, 该问题可以归结为如下限制性估计**:

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{3.1}$$

该限制性估计的对偶就是“扩张”或限制性估计的“共轭”形式

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(S)}, \quad \forall g \in L^{q'}(S). \tag{3.2}$$

该“共轭”形式与PDE的研究密切相关. 例如:当S是锥面或抛物面时,$\widehat{gd\sigma}$分别表示自由波动方程或Schrödinger方程的解, 当$q=2$时, (3.2)对应着经典的Strichartz估计.

- **限制性估计的必要条件**: 以单位球面S为例, 寻求(3.2)的必要条件. 取$g=1$,用标准的振荡积分就推出

$$\left|\widehat{d\sigma}\right| \sim |x|^{-\frac{d-1}{2}}, \quad |x| \gg 1. \implies p' > \tfrac{2d}{d-1} \text{ (必要条件之一)}.$$

另一方面, 取g是δ-cap上的特征函数, 则$\widehat{gd\sigma}$(Knapp函数)聚积在尺度为$\delta^{-1}\times\delta^{-2}$的tube上, 从而(3.2)的另一个必要条件$p' \geqslant \frac{d+1}{d-1}q$. **限制性估计(3.1)或(3.2) 成立的必要条件是**

$$p' > \frac{2d}{d-1}, \quad p' \geqslant \frac{d+1}{d-1}q. \tag{3.3}$$

限制性猜想:限制性估计(3.1)或(3.2)成立的充要条件是(3.3).

为方便起见,用$R_S(p \to q)$与$R_S^*(q' \to p')$ 分别表示限制性估计(3.1) 及其“共轭形式”(3.2). 三类特殊曲面的限制性猜想表述如下:

- 球面或抛物面之紧子集上的限制性猜想可表述为

$$\begin{cases} R_S^*(q' \to p') \iff p' > \dfrac{2d}{d-1},\ p' \geqslant \dfrac{d+1}{d-1}q, \\ \quad \text{or} \\ R_S^*(\infty \to p') \iff p' > \dfrac{2d}{d-1}. \end{cases} \tag{3.4}$$

- 锥面(直纹面)紧支集上相应的限制性猜想可表述为

$$\begin{cases} R_S^*(q' \to p') \iff p' > \dfrac{2(d-1)}{d-2},\ p' \geqslant \dfrac{d}{d-2}q, \\ \quad \text{or} \\ R_S^*(\infty \to p') \iff p' > \dfrac{2(d-1)}{d-2}. \end{cases} \tag{3.5}$$

- **Stein-Tomas型限制性估计**: 采用TT^*方法, Stein-Tomas型限制性估计$R(p,2)$等价于

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \iff \|f * \widehat{d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \ p \leqslant \frac{2(d+1)}{d+3}.$$

- **分数阶积分框架**: 采用Young不等式与$|\widehat{d\sigma}| \lesssim |x|^{-(d-1)/2}$,可见

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{p'} \lesssim \|f * |\cdot|^{-(d-1)/2}\|_{p'} \lesssim \|f\|_p, \quad p \leqslant \frac{4d}{3d+1}.$$

- **实插值方法的框架**:利用单位分解及实插值方法可见

$$\|f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\|_{p'} \lesssim 2^{-\varepsilon k}\|f\|_p, \quad p < \frac{2(d+1)}{d+3}.$$

  由此推出非端点型的Stein-Tomas估计$R(p,2)$.

- **Stein-复插值方法的框架** 通过构造解析算子簇,证明

$$\Big\|\sum_{k>0} 2^{[\frac{d-1}{2}+it]} f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\Big\|_\infty \lesssim \|f\|_1, \ \Big\|\sum_{k>0} 2^{[-1+it]} f * (\psi_k \widehat{d\sigma})\Big\|_2 \lesssim \|f\|_2,$$

  由此推出端点型Stein-Tomas估计$R(\frac{2(d+1)}{d+3},2)$.

■ **限制性猜想的研究进展-球面与抛物面的情形**: 采用TT^*方法, Stein-Tomas证明当$p' \geqslant \frac{2(d+1)}{d-1}$时,**限制性猜想**成立! 在过去的三十年,许多数学家致力突破Stein-Tomas门槛. 主要进展如下:

- $\mathbb{R}^2$情形,限制性猜想已解决.见Stein(1967), Fefferman-Stein(1970), Zygmund(1974)的数学家的研究.
- $\mathbb{R}^3$情形. 限制性猜想($p' \geqslant 3$)尚未解决! Stein-Tomas证明$p' \geqslant 4$情形下的限制性估计(1975). **1991年Bourgain率先获得突破, 解决了$p' > 4 - \frac{2}{15}$对应的限制性估计**.经历Wolff(1995)、Tao-Vargas- Vega(1998-2000)、直到Tao(2003)改进Bourgain-Wolff发展的双线性L^2估计, 验证了$p' > 3\frac{1}{3}$对应的限制性猜想. 该方法似乎无法改进p'的下界. **$\mathbb{R}^d$($d > 3$)情形的研究进展, 同$\mathbb{R}^3$情形**.
- Bourgain-Guth(2012)通过BCT多线性方法与“波包分解”, 发展了基于**尺度归纳与自相似迭代的新方法**. 给出了限制性猜想、Kakeya 极大函数猜想($p' > 3\frac{3}{10}$)的新证明及高维情形下的新突破!
- Guth借助于多项式零点分类(一个代数几何的基本定理)获得了$p' \geqslant 3.25$对应的限制性估计(2014,JMAS).

Remarks 2 (锥面上的限制性估计的研究进程)

与球面、锥面上的研究进程类似,Strichartz证明了$p' \geqslant \frac{2d}{d-2}$ 对应的限制性估计,问题是如何解决$p' > \frac{2(d-1)}{d-2}$对应的限制性猜想,具体进展如下:

- $\mathbb{R}^3$情形. 限制性估计($p' > 4$)被Barcelao(1985)解决!
- $\mathbb{R}^4$情形. 限制性猜想($p' > 3$, 可能sharp)被Wolff(2000)解决!
- Wolff(2000)验证$p' \geqslant \frac{2(d+2)}{d}$ 对应的限制性估计.

Remarks 3 (三类典型超曲面–Bochner-Riesz猜想与限制性猜想的关系)

- Carbery 证明**抛物型Bochner-Riesz猜想**$\Longleftrightarrow$**抛物限制型猜想**;
- Tao证明**球面Bochner-Riesz**猜想$\Longrightarrow$**球面限制型估计**.
- 锥面的Bochner-Riesz猜想很特殊, 它对应着Mockenhaupt 锥乘子问题, 它与锥限制性猜想的关系尚不清楚.

Restriction $\Longrightarrow$ Bochner-Riesz Means, partly

★ 采用非齐次Littlewood-Paley型分解

$$S^\delta(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(K^\delta\psi_j * f)(x) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty}(S_j^\delta f)(x),$$

及S_j^δ支在$|x| \sim 2^j$附近,问题就归结为

$$\|S_j^\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \sim \|S_j^\delta f\|_{L^p(x:|x|\sim 2^j)} \lesssim 2^{-j\varepsilon}\|f\|_p, \quad \exists \varepsilon > 0.$$

★ 采用Stein-Tomas型$(2,p)$限制性估计

$$\|\hat{f}\|_{L^2(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \ 1 \leqslant p \leqslant p_0 \triangleq \frac{2(d+1)}{d+3}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad (3.6)$$

采用Plancherel定理与极坐标方法, 易得L^2局部Bochner-Riesz 估计:

$$\|S_j^\delta f\|_2 \lesssim 2^{-j(\delta+\frac{1}{2})}\|f\|_p \Longrightarrow \|S_j^\delta f\|_p \lesssim 2^{-jd(\frac{d+1+2\delta}{2d}-\frac{1}{p})}\|f\|_p,$$

"$\Longrightarrow$" 用到Hölder不等式及$S_j^\delta f$的子集性质.

由此获得**Bochner-Riesz算子的L^p估计$(p < p_0)$**及弱型L^{p_0}估计.

Bochner-Riesz Conjecture $\Longrightarrow$ Restriction Conjecture

★ 根据标准的Carleson-Sjölin理论，Bochner-Riesz猜想与限制性猜想可以归结为如下**Hörmander型积分版本**：

$$\begin{cases} \left\| \int e^{-iR|x-y|} a(x,y) f(y) dy \right\| \lesssim R^{-\frac{d}{p'}+\alpha} \|f\|_p, & \mathrm{BR}(p,\alpha) \\ \left\| \int e^{-iR\langle \frac{x}{|x|}, y\rangle} a(x,y) f(y) dy \right\| \lesssim R^{-\frac{d}{p'}+\alpha} \|f\|_p, & \mathrm{R}(p,\alpha). \end{cases} \tag{3.7}$$

★ $\mathrm{R}(p,\alpha)$的相函数恰好是$\mathrm{BR}(p,\alpha)$的相函数的线性化：

$$R|x-y| = R|x| - R\langle \frac{x}{|x|}, y\rangle + O(1) \quad |x| \sim 1,\ |y| \lesssim R^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

由此推出：对$\forall\ \alpha > 0$，有$\mathrm{BR}(p,\alpha) \Longrightarrow \mathrm{R}(p,2\alpha)$.

★ 利用"$\varepsilon-$消除原理"

$$\left[\mathrm{R}(p_0,\varepsilon)\ \ \forall\, \varepsilon > 0\right] \Longrightarrow \left[\mathrm{R}(p,0)\ \ \forall\, 1 \leqslant p < p_0\right], \tag{3.9}$$

推出：Bochner-Riesz猜想$\Longrightarrow$限制性猜想(见Tao: Duke J. Math.).

★ 最新进展,Bourgain、Wolff、Bourgain-Guth、Bourgain-Demeter等人发展的ℓ^p分离性方法, 不仅在调和分析的四大猜想研究中举足轻重, 对**数论、几何测度论、PDE、关联几何、堆垒组合学**等学科中著名猜想的研究也十分重要. 例如: Bourgain-Demeter-Guth刚刚解决了数论中著名的Vinogradov猜想.

1. Bourgain-Guth, Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates, GAFA, 21(2011)

2. Bourgain-Demeter, The proof of the ℓ^2 decompling conjecture, Ann.Math, 182(2015)

3. Bourgain-Demeter-Guth, The proof of main conjecture in Vinogradov's mean value theorem for the degrees higher than three. Ann.Math. 184(2016).

4. Guth L. A restriction estimate using polynormal partitioning, JAMS, (2015)

5.Bourgain, Moment inequalities for trigonometric polynomials with spectrum in curved hypersurfaces. Israel J. Math. 193(2013).

限制性估计研究的现代方法与基本工具

- 驻相位分析与**Carleson-Sjölin** 方法.
- $\varepsilon-$移除性准则与局部化方法.
- 横截性条件与双线性方法.
- 波包分解.
- 组合分析与尺度归纳技术.
- **BCT**的多线性技术与**Burgain-Guth**方法.
- **Burgain-Demeter**的**decoupling**方法.
- **Khinchin** 不等式(随机方法).
- **Guth** 的多项式零点集合(代数簇)剖分技术.

Khinchine's inequality method (Rademacher functions)

Theorem 3.1 (限制性猜想的若干相互等价表述)

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(S)}, \quad p' > \frac{2d}{d-1},\ p' = \frac{d+1}{d-1}q; \tag{3.10}$$

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^{\infty}(S)}, \quad p' > \frac{2d}{d-1}; \tag{3.11}$$

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^{p'}(S)}, \quad p' > \frac{2d}{d-1}. \tag{3.12}$$

- $p' = \frac{2d}{d-1}$, $p' = \frac{d+1}{d-1}q$意味着$p' = \frac{2d}{d-1}$,从而(3.10)$\Leftrightarrow$(3.10).
- 根据Soblev嵌入定理与插值公式,仅需证明(3.11) $\Longrightarrow$ (3.12).
- (3.11)$\Longrightarrow$(3.12)等价于证明: 对$\forall 2 \leqslant p \leqslant \infty$, 有

$$\|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(S)} \Longrightarrow \|\hat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},\ q > p. \tag{3.13}$$

进而等价于对偶形式:对$\forall 1 \leqslant p \leqslant 2$, 有

$$\|\hat{f}\|_{L^1(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \Longrightarrow \|\hat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},\ 1 \leqslant q < p. \tag{3.14}$$

Theorem 3.2 (弱型估计$\Longrightarrow$ (3.14))

设$1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < C_0 < \infty$满足

$$\sigma\big(\{x \in S : |\hat{f}(x)| > \lambda\}\big) \leqslant C_0 \lambda^{-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \lambda > 0, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{3.15}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sigma\big(\{x \in S : |\hat{f}(x)| > \lambda\}\big) \lesssim \lambda^{-p} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \lambda > 0, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{3.16}$$

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 \leqslant q < p, \quad f \in L^q(\mathbb{R}^d). \tag{3.17}$$

Theorem 3.3 (Khinchin不等式–定理3.2基本工具)

设$\{\omega_j\}$是满足$\mathbb{P}[\omega_j = 1] = \mathbb{P}[\omega_j = -1] = 1/2$的相互独立随机变量, 则

$$C^{-1}\Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^2\Big)^{p/2} \leqslant \mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{j=1}^N \omega_j a_j\Big|^p\Big) \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^2\Big)^{p/2}, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{3.18}$$

$$\text{这里} \quad \mathbb{E}(|g|^p) \triangleq p\int_0^\infty \lambda^{p-1} P(\{\omega : |f(\omega)| \geqslant \lambda\}) d\lambda.$$

驻相分析与Carleson-Sjölin方法

考虑与限制型定理相关的振荡积分算子

$$T_\lambda f(z) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\lambda\Phi(z,y)} a(z,y) f(y) dy, \quad \lambda > 0, \tag{3.19}$$

其中$a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, $\Phi(x,y) \in C^\infty(\mathrm{supp} a)$. 该振荡积分**相对应的Lagrangian 流形与典则关系**

$$\mathcal{C}_\Phi = \Big\{ \big(z, \Phi_z'(z,y), y, -\Phi_y'(z,y)\big) \Big\} \in T^*\mathbb{R}^d \times T^*\mathbb{R}^{d-1} \tag{3.20}$$

Carleson-Sjölin条件

(i) 假设$\Pi_{T^*(R^{d-1})} : \mathcal{C}_\Phi \longmapsto T^*(\mathbb{R}^{d-1})$是自然的投影,满足非退化条件

$$\mathrm{rank} d\Pi_{T^*(R^{d-1})} \equiv 2(d-1). \quad \Longrightarrow \Big(\mathrm{rank}\Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial y_k}\Big) = d-1 \Big). \tag{3.21}$$

(ii) 对$\forall z_0 \in \mathrm{supp}_z a$, $y \longmapsto \Phi'_z(z_0, y)$表示Lagrangian 流形$\mathcal{C}_\Phi$到余切丛$T^*\mathbb{R}^d$的纤维上的投影，其像

$$S_{z_0} \triangleq \Pi_{T^*_{z_0}\mathbb{R}^d}(\mathcal{C}_\Phi) = \left\{\Phi'_z(z_0, y) : \Big(z_0, \Phi'_z(z_0, y), y, -\Phi'_y(z_0, y)\Big) \in \mathcal{C}_\Phi\right\}$$

是$T^*_{z_0}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$中的一个$C^\infty$浸入超曲面，曲率条件可以表述为

$$S_{z_0} \subset T^*_{z_0}(\mathbb{R}^d) \text{ 具有非零的Gauss曲率} \tag{3.22}$$

称(3.21)与(3.22)为**Carleson-Sjölin条件**.

振荡积分估计: 设$a \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$，相函数$\Phi(x) \in C^\infty$满足C-S条件,则(3.19)定义的振荡积分算满足

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant O(\lambda^{-\frac{d}{q}})\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}, \qquad q = \tfrac{d+1}{d-1}p', \tag{3.23}$$

这里

$$\text{(i)} \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2, \quad d \geqslant 3;$$

$$\text{(ii)} \qquad 1 \leqslant p < 4, \quad d = 2;$$

Theorem 3.4 (Stein-Tomas限制性定理)

设$d \geqslant 2$, $S \subset \mathbb{R}^d$ 是具非零高斯曲率的光滑超曲面, $d\sigma(x)$是曲面测度.
设$\beta(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, 记$d\mu \triangleq \beta d\sigma$. 则

$$\Big(\int_S |\hat{f}(\xi)|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{3.24}$$

这里$q = \frac{d+1}{d-1}p'$, $1 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d+3}$, $d \geqslant 3$; $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$, $d = 2$.

Local restriction estimates

整体限制性估计可以归结为局部限制性估计. 将$f(x)\in L^p(\mathbb{R}^d)$对应的限制性估计归结为$f(x)\in L^p(B(x_0,R))$对应的限制性估计. 实现这种归结的内在原因: **曲面测度$d\sigma$的Fourier变换$(d\sigma)^\vee(x)$在某种意义下具有局部化的特征** (即:当$|x|\to+\infty$具有衰减的性质).

局部限制性估计: 对$\forall p,q$及任意的$\alpha\geqslant 0$, 用$R_S(p\to q;\alpha)$ 表示局部化限制性估计

$$\|\hat{f}|_S\|_{L^q(S;d\sigma)}\leqslant C_{p,q,S,\alpha}R^\alpha\|f\|_{L^p(B_R(0))},\quad \forall f(x)\in\mathcal{D}(B_R(0)),\tag{3.25}$$

Theorem 3.5 (Tao-99)

设ρ是$\widehat{d\sigma}$的衰减指标. 如果局部限制性估计$R_S(p\to p;\alpha)$ 对于某个$p<2$和$0<\alpha\ll 1$成立, 则有如下整体限制性估计

$$R_S(p\to q),\quad 只要\ \frac{1}{q}>\frac{1}{p}+\frac{C_\rho}{\log(1/\alpha)}.\tag{3.26}$$

. . . .

bilinear estimates

wave packets decomposition

Induction on scales

-
-
-

Bourgain-Guth argument

-
-
-

Kakeya Conjecture

- 1917年，日本数学家Kakeya提出如下问题：旋转平面上的单位线段使其倒置所扫过的最小面积是多少？这就是著名的**Kakeya needle 问题**.
- 以线段的中心旋转，所需面积是$\pi/4$; 通过精心的"三点-U式旋转" 就可以使得扫过的面积为$\pi/8$.
- 1925年Besicovitch 观察到两个基本理念：(i) 对$\forall\ \varepsilon > 0$, 在平面上平移单位needle到任意的位置，扫过的面积小于ε. (ii) 对$\forall\ \varepsilon > 0$, 存在长边为1、包含任意方向tube $\{T_j\}$的集合，满足$m(\cup_j T_j) < \varepsilon$. 基于上述理念，**Besicovitch通过构造Besicovitch集合，证明旋转平面上的单位线段使其倒置所扫过的最小面积可以任意小**!
- 一般来讲，Besicovitch集是指R^d中含任意方向单位线段的集合. Besicovitch集的构造表明其测度为零，那么Besicovitch集合的Minkowski 或Hausdorff维数是否严格小于d? 这里

$$\dim_M(E) = \inf\left\{n \,\middle|\, E \subset \bigcup_{j=1}^{O(\delta^{-n})} B_j(x_j,\delta),\ \forall 0<\delta\ll 1\right\};$$

$$\dim_H(E) = \inf\left\{n \,\middle|\, E \subset \bigcup_j B_j(x_j,r_j),\ \sum_j r_j^n \lesssim 1,\ 0<r_j\leqslant\delta\ll 1\right\}$$

易见$\dim_H(E) \leqslant \dim_M(E)$.

- Kakeya 猜想: $\mathbb{R}^d$空间中Besicovitch集合的Minkowski或Hausdorff维数是d.
- 1971年, Drury证明了$d=2$情形的Kakeya 猜想.
- 对于$d\geqslant 3$的情形, Kakeya 猜想仍然是公开的问题! Bourgain, Wolff, Katz, Laba 等证明

$$\begin{cases} \dim_M(E) \geqslant \max\left(\frac{d+2}{2}+10^{-10}, \frac{4d+3}{7}\right), & (1999-2000) \\ \dim_H(E) \geqslant \max\left(\frac{d+2}{2}, \frac{6d+5}{11}\right), & (1995-1999) \end{cases}$$

- Tao 证明了$\dim_H(E) \geqslant (2-\sqrt{2})(d-4)+3, \quad (2000)$.

■ **Kakeya 极大函数** 对$a \in \mathbb{R}^d$, $\omega \in S^{d-1}$, 及固定$0 < \delta \ll 1$, 定义中心为a,方向为ω的$1 \times \delta$型tube $T_\omega^\delta(a)$如下:

$$T_\omega^\delta(a) = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : |(x-a)\cdot\omega| \leqslant \tfrac{1}{2},\ |x - a - ((x-a)\cdot\omega)\omega| \leqslant \delta\Big\},$$

定义Kakeya 极大函数

$$\mathcal{K}_\delta f(\omega) \triangleq \sup_{a\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathcal{L}^d(T_\omega^\delta(a))} \int_{T_\omega^\delta(a)} |f|dx,\ \ \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \tag{4.1}$$

其中$\mathcal{L}^d(T_\omega^\delta(a)) = \alpha_{(d-1)}\delta^{d-1}$,$\alpha_{(d-1)}$表示$\mathbb{R}^{d-1}$中单位球的体积.

直接验证

$$\begin{cases} \|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^\infty(S^{d-1})} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^1(S^{d-1})} \lesssim \delta^{1-d}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \\ \|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^\infty(S^{d-1})} \lesssim \delta^{1-d}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{cases} \tag{4.2}$$

- 人们自然会问:当$p < \infty$时, Kakeya极大算子是否具有关于δ的一致有界的算子范数$\|\mathcal{K}_\delta\|_{L^p - L^q}$? 回答是否定的, 即

$$\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^q(S^{d-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ 0<\delta<1,$$

不能成立！用Bescovitch集合的δ-邻域上的特征函数$f=\chi_{B_\delta}(x)$测试Kakeya极大算子，总有$\mathcal{K}_\delta f(\omega)=1,\ \forall\omega\in S^{d-1}$. 因此,

$$\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^q(S^{d-1})} \approx 1, \quad \text{然而} \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{L}^d(B_\delta)^{1/p} \to 0,\ \delta\to 0.$$

相应的L^p-L^q范数起码是δ的log增长.

- 退一步讲，人们只能期待形如

$$\begin{cases} \|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^p(S^{d-1})} \leqslant C(d,p,\varepsilon)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \\ \forall\varepsilon>0,\quad 0<\delta<1, \quad \text{and} \quad f\in L^p(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{4.3}$$

成立！选取$f=\chi_{B(0,\delta)}(x)$,注意到$B(0,\delta)\subset T_\omega^\delta(0)$, 就有

$$\begin{cases} \mathcal{K}_\delta f(\omega) = \mathcal{L}^d(B(0,\delta))/\mathcal{L}^d(T_\omega^\delta(0)) \approx \delta, \quad \forall\omega\in S^{d-1} \\ \forall\omega\in S^{d-1}, \quad \text{然而} \quad \|f\|_p \sim \mathcal{L}^d(B(0,\delta))^{\frac{1}{p}} \sim \delta^{\frac{d}{p}}. \end{cases}$$

由此可见$p<d$时, (4.3)也不可能成立！

- 上面的分析,人们期待的**Kakeya极大函数猜想**可以表述为

$$\begin{cases} \big\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\big\|_{L^d(S^{d-1})} \leqslant C(d,\varepsilon)\delta^{-\varepsilon}\|f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}, \\ \forall\varepsilon>0, \;\; 0<\delta<1, \;\; \text{and} \;\; f\in L^d(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{4.4}$$

- 受上面特款的启发, Bourgain(1991) 就提出了如下**Kakeya极大函数猜想**

$$\big\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\big\|_{L^p(S^{d-1})} \lessapprox \delta^{1-\frac{d}{p}}\|f\|_p, \;\; \forall 1\leqslant p\leqslant d, \tag{4.5}$$

这里$A \lessapprox B$表示对于任意的ε, $A \leqslant C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} B$.

- (4.4)与(4.2)第三式插值, 就得**Kakeya极大函数猜想的等价形式**:

$$\begin{cases} \big\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\big\|_{L^q(S^{d-1})} \leqslant C(d,p,\varepsilon)\delta^{-(d/p-1+\varepsilon)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \\ \forall\varepsilon>0, \;\; 1\leqslant p\leqslant d, \;\; q=(d-1)p', \;\; 0<\delta<1. \end{cases} \tag{4.6}$$

业已证明2维Kakeya极大函数猜想, 但$d \geqslant 3$情形下的Kakeya极大函数猜想是open!

■ **Kakeya 极大估计的离散化及对偶形式** 称$\{e_1,\cdots,e_m\}\subset S^{d-1}$是单位球面的$\delta$-分离子集, 如果满足

$$|e_j-e_k|\geqslant\delta,\quad j\neq k.$$

若对任意$e\in S^{d-1}$,总存在$1\leqslant\ell\leqslant m$,使得$|e-e_\ell|<\delta$,称$\{e_1,\cdots,e_m\}$是极大$\delta$-分离子集. 约定$T_1,\cdots,T_m$ 是δ-分离子集$\{e_1,\cdots,e_m\}$对应的δ-分离的tube,其中

$$T_k=T^{\delta}_{e_\ell}(a_k),\quad 1\leqslant k\leqslant m,\quad m\lesssim\delta^{1-d}.$$

当$T_1,\cdots,T_m$ 是极大的δ-分离tube时, $m\cong\delta^{1-d}$.

Remarks 4

假设$e,e'\in S^{d-1}$满足$|e-e'|\leqslant\delta$,则

$$\mathcal{K}_\delta f(e)\leqslant C(d)\mathcal{K}_\delta f(e').$$

该几何事实在证明*Kakeya*极大函数估计的离散形式中非常重要.

Proposition 1

设$1 < p < \infty$,$0 < \delta < 1$, $1 \leqslant M < \infty$ 及

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} t_k \chi_{T_k} \Big\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant M, \quad q = \tfrac{p}{p-1}, \tag{4.7}$$

其中$T_1, \cdots, T_m$ 是δ-分离子集δ-型tube, $t_1, \cdot, t_m$是满足

$$\delta^{d-1} \sum_{k=1}^{m} t_k^q \leqslant 1 \tag{4.8}$$

的正数, 则

$$\big\| \mathcal{K}_\delta f(\omega) \big\|_{L^q(S^{d-1})} \leqslant C(d) M \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.9}$$

通常M具有$\delta^{-\beta}$的形式.

注记: (4.7)表示对偶空间的函数, (4.8)表示正交基中元素$\{\chi_{T_k}\}$应满足的法化条件.

Theorem 4.1

对任意的$0<\delta<1$ 及$f(x)\in L^2(\mathbb{R}^2)$,有

$$\left\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\right\|_{L^2(S^1)} \leqslant C\sqrt{\log(1/\delta)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad C \text{ 是绝对常数}. \tag{4.10}$$

Theorem 4.2

设$1<p<\infty$,$q=\frac{p}{p-1}$,$0<\delta<1$, $1\leqslant M<\infty$, 则

$$\left\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\right\|_{L^q(S^{d-1})} \leqslant C(d,p,\varepsilon)M\delta^{-\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \ \forall\varepsilon>0 \tag{4.11}$$

成立的充要条件: 对于任意的δ-分离的δ-型$tube$ $T_1,\cdots,T_m$, 有

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\chi_{T_k}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,q,\varepsilon)M\delta^{-\varepsilon}(m\delta^{d-1})^{\frac{1}{q}}, \quad \varepsilon>0. \tag{4.12}$$

进而, (4.12)成立的充要条件为

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\chi_{T_k}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,q,\varepsilon)M\delta^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon>0 \tag{4.13}$$

Corollary 4.3

设$1 < p < \infty$,$q = \frac{p}{p-1}$,$0 < \delta < 1$, $0 < \beta < \infty$, 则

$$\left\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\right\|_{L^q(S^{d-1})} \leqslant C(d,p,\varepsilon)\delta^{-\beta-\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},\ \forall \varepsilon > 0 \tag{4.14}$$

成立的充要条件是:对所有的δ-分离的δ-型tube $T_1, \cdots, T_m$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m}\chi_{T_k}\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,q,\varepsilon)\delta^{-\beta-\varepsilon},\ \forall \varepsilon > 0. \tag{4.15}$$

特别, Kakeya极大函数猜想(4.4)成立的充要条件:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m}\chi_{T_k}\Big\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,\varepsilon)\delta^{-\varepsilon},\quad \varepsilon > 0, \tag{4.16}$$

其中$T_1, \cdots, T_m$表示所有的δ-分离的δ-型tube.

■ **Kakeya 极大函数的L^p估计意味着Besicvitch集合Minkowski维数的下界估计:** 假设存在$1 < p < \infty$与$\beta > 0$满足

$$\left\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\right\|_{L^p(S^{d-1})} \lesssim \delta^{-\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \ \forall 0 < \delta < 1. \tag{4.17}$$

B_δ表示Besicvitch集合的δ邻域(对任意方向,包含一个开δ-tube). 取$f(x) = \chi_{B_\delta}(x)$, 则$\mathcal{K}_\delta f(\omega) = 1$, $\omega \in S^{d-1}$. 于是, (4.17)就意味着

$$1 \approx \left\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\right\|^p_{L^p(S^{d-1})} \lesssim \delta^{-\beta p}\mathcal{L}^d(B_\delta), \ \Longrightarrow \underline{\dim}_M B \geqslant d - \beta p, \tag{4.18}$$

这里用到集合$A \subset \mathbb{R}^d$的Minkowski维数之定义

$$\begin{cases} \underline{\dim}_M A = \inf\left\{s > 0: \ \liminf\limits_{\delta\to 0} \delta^{s-d}\mathcal{L}^d(A_\delta) = 0\right\}; \\ \overline{\dim}_M A = \inf\left\{s > 0: \ \limsup\limits_{\delta\to 0} \delta^{s-d}\mathcal{L}^d(A_\delta) = 0\right\}. \end{cases} \tag{4.19}$$

用$N(A,\delta)$表示覆盖A的半径为δ的小球的最小个数, 则

$$\underline{\dim}_M A = \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log N(A,\delta)}{\log(1/\delta)}, \quad \overline{\dim}_M A = \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log N(A,\delta)}{\log(1/\delta)}. \tag{4.20}$$

■ **Kakeya极大函数L^p估计$\Longrightarrow$Besicvitch集Hausdorff维数估计:**

Theorem 4.4 (Kakeya极大猜想$\Longrightarrow$Kakeya猜想)

记$B \subset \mathbb{R}^d$是任意Besicvitch集. 设$1 < p < \infty$,$\beta > 0$,$d - \beta p > 0$. 若

$$\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^p(S^{d-1})} \leqslant C(d,p,\beta)\delta^{-\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\, 0 < \delta < 1, \tag{4.21}$$

则$\dim_H(B) \geqslant d - \beta p$. 特别地,

- 对某个$1 < p < \infty$, 若(4.3)成立,则$\dim_H(B) = d$.
- **Kakeya极大函数猜想(4.4)意味着经典的Kakeya猜想.**

Theorem 4.5

设$d \geqslant 3$, 对任意$0 < \delta < 1$与$f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$.则

$$\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^2(S^{d-1})} \leqslant C(d)\delta^{-(2-d)/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.22}$$

其中$(2-d)/2$是可能的最佳指标. 根此与定理4.5意味着$\mathbb{R}^d$ **$(d \geqslant 2)$中Besicvitch集的hausdorff维数起码为2.**

■ **限制性猜想$\Longrightarrow$Kakeya极大猜想($\Longrightarrow$ Kakeya猜想):**

回忆限制性猜想形式之一为

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,q)\|f(\omega)\|_{L^q(S^{d-1})},\ f \in L^q(S^{d-1}),\ q > \frac{2d}{d-1}. \tag{4.23}$$

通过Khintchine不等式，可以证明**限制性猜想$\Longrightarrow$Kakeya极大猜想**.

Theorem 4.6 (限制性猜想$\Longrightarrow$Kakeya极大猜想)

设$2d/(d-1) < q < \infty$, $p = q/(q-2)$,则限制性估计(4.23)意味着

$$\begin{cases} \|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\|_{L^p(S^{d-1})} \leqslant C(d,q)\delta^{\frac{4d}{q}-2(d-1)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \\ \forall\, 0 < \delta < 1,\ f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{4.24}$$

特别地，我们有

- 限制性猜想(4.23)$\Longrightarrow$Kakeya极大猜想(4.5).
- 限制性猜想(4.23) 意味着

$$\dim_H(B) \geqslant \frac{2d-(d-2)q}{q-2},\quad \frac{2d}{d-1} < q < \infty.$$

■ Nikodym极大函数与Nikodym 极大猜想

Definition 4.7 (Nikodym集合与Nikodym极大函数)

$\mathbb{R}^d$中具有零测度的Borel集N称为Nikodym集合，如果对$\forall x \in \mathbb{R}^d$，总存在直线$L$使得$L \cap N$包含一个单位线段. 对任意的$0 < \delta < 1$,定义Nikodym极大函数

$$\mathcal{N}_\delta f(x) \triangleq \sup_{x \in T} \frac{1}{\mathcal{L}^d(T)} \int_T |f| dx, \quad \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \; T \triangleq \{T_e^\delta(a)\}. \tag{4.25}$$

Conjecture 4.1 (Nikodym 极大猜想)

$$\|\mathcal{N}_\delta f(x)\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,\varepsilon)\delta^{-\varepsilon}\|f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}, \; \forall\, \varepsilon > 0, \; 0 < \delta < 1. \tag{4.26}$$

Theorem 4.8 (Nikodym极大猜想$\Longrightarrow$Nikodym猜想)

记$N \subset \mathbb{R}^d$是任意Besicvitch集. 设$1 < p < \infty$,$\beta > 0$,$d - \beta p > 0$. 若

$$\|\mathcal{N}_\delta f(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(d,p,\beta)\delta^{-\beta}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\, 0 < \delta < 1, \tag{4.27}$$

则$\dim_H(N) \geqslant d - \beta p$. 特别地,

- 对某个$1 < p < \infty$, 若(4.27)成立, 则$\dim_H(N) = d$.
- **Nikodym极大猜想(4.26)意味着经典的Nikodym猜想**.

Tao1999年证明了如下著名的定理:

Theorem 4.9 (Nikodym极大猜想$\Longleftrightarrow$Kakeya极大猜想)

Kakeya极大猜想(4.4)$\Longleftrightarrow$Nikodym极大猜想(4.26).

Kakeya猜想研究获得突破主要基于两种方法, 其一是基于组合与关联几何的几何方法; 其二是基于堆垒组合学的算术方法.

■ **Kakeya猜想的几何方法:** 几何方法源于Cordoba. 关键的几何事实是两条不平行的线段(或tube) 最多相交一点(或ball). 具体地讲,两个夹角~ 1的$\delta-$tubes 仅能相交在一个δ-球; 两个夹角$\sim \theta$的$\delta-$tubes仅能相交在$\frac{1}{\theta}$个δ-球的并集之中.

- 采用Cordoba的几何方法可以精确估计$\|\sum_{T\in\mathbb{T}}\chi_T\|_2$. 进而利用组合数学基本事实,证明3类Kakeya型猜想对于$p=2, d\geqslant 3$ 成立, 说明所有Bescovitch集合的Hausdorff及Minkowski维数起码是2. 按照现代观点, Cordoba方法表明:平面上具有不同方向的tubes 本质不交.
- Bourgain利用组合几何的事实(如:两条相交直线可以唯一地决定一个平面)等, 发展了Bushes方法; Wolff进而发展了Hairbushes方法, 证明Bescovitch集合的Hausdorff维数起码为5/2,等.
- Cordoba方法在高维情形失效(该方法期待更多的tubes完全不相交)! Bourgain发展的算术方法,将线段视为算术级数,借助于堆垒数论Szemerédi定理证明的Gowers方法, 给出了高维情形,Bescovitch集的Hausdorff及Minkowski维数的下界估计!

■ **Bourgain的Bushes方法:** 如何证明$\dim(B) \geqslant \frac{d+1}{2}$? 粗糙地讲, 设Besicovitch集满足$\dim(B) = m$, 自然每一个线段的余维应是$m-1$. 既然$\mathbb{R}^d$存在经过$x_0$的$d-1$维的线段簇, 期望Besicovitch集合每一点x_0应包含在$(d-1)-(m-1)$维的直线族中. 经过x_0的所有直线的并形成了一个“bush”. 鉴于两条直线最多相交一点, bush中直线在远离x_0处是不同的, 从而推出该集合具有维数$(d-1)-(m-1)+1$. 但是, 该bush包含在Besicovitch集之中,因此

$$(d-1)-(m-1)+1 \leqslant m \iff m \geqslant \frac{d+1}{2}.$$

Theorem 4.10 (限制弱型Kakeya极大估计$\Longrightarrow$Besicovitch集维数估计)

$B \subset \mathbb{R}^d$是任意Besicvitch集. 设$1 \geqslant p < \infty$,$\beta > 0$,$d-\beta p > 0$. 若

$$\begin{cases} \sigma^{d-1}\big(\{e \in S^{d-1} : \mathcal{K}_\delta(\chi_E)(e) > \lambda\}\big) \leqslant C(d,p,\beta)\delta^{-\beta p}\lambda^{-p}\mathcal{L}^d(E), \\ \forall \text{ Lebesgue 可测集} E \subset \mathbb{R}^d, \quad 0<\delta<1, \quad \lambda > 0. \end{cases} \tag{4.28}$$

则$\dim_H(B) \geqslant d - \beta p$.

- (4.28)是

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^p(S^{d-1})} \lesssim \delta^{-\beta}\|f\|_p$$

对应的限制弱型Kakeya极大估计，定理4.10的证明类似于定理4.5. 仅需验证(4.28)对于$p=(d+1)/2$, $\beta=(d-1)/(d+1)$成立，就得$\dim_H=(d+1)/2$.

- 仅需验证**Kakeya极大函数猜想(4.6)**:

$$\begin{cases} \big\|\mathcal{K}_\delta f(\omega)\big\|_{L^q(S^{d-1})} \leqslant C(d,p,\varepsilon)\delta^{-(d/p-1+\varepsilon)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \\ \forall\varepsilon>0,\ \ 1\leqslant p\leqslant d,\ \ q=(d-1)p',\ \ 0<\delta<1. \end{cases}$$

在$p=(d+1)/2$, $q=(d-1)p'$时对应的限制型弱形式即可.

Theorem 4.11 (基于Bushes方法的Bourgain定理)

对任意的Lebesgue 可测集$E\subset\mathbb{R}^d$, $\forall 0<\delta<1$ 及$\lambda>0$,有

$$\sigma^{d-1}\big(\big\{e\in S^{d-1}:\ \mathcal{K}_\delta(\chi_E)(e)>\lambda\big\}\big)\leqslant C(d)\delta^{1-d}\lambda^{-d-1}\mathcal{L}^d(E)^2. \tag{4.29}$$

特别，对$\mathbb{R}^d$上所有Besicovitch集合B,均有$\dim_H(B)\geqslant(d+1)/2$.

Wolff的Hairbrushes方法:

- Bourgain的bush方法具有局限性, 原因在于并非Besicovitch集中任意两点均能被该集合中的线段连接. 例如: 在2维情形,Cordoba的方法就排除了该现象的发生.
- Wolff[1995]统一了Cordoba与bushes方法,获得了$m > \frac{d+2}{2}$.
- Wolff的几何理念是考虑经过"茎"-线段T_0上点的所有bush之并(与过单点x_0的一个bush相对应), 我们称为"Brush". 如同一个bush的情形, Cordoba的方法确保"brush"中的直线是本质不交的.
- 鉴于brush较bush的维数高1, 该brush的维数为$(d-1)-(m-1)+2$. 注意到该brush包含在Besicovitch集B之中,因此

$$(d-1)-(m-1)+2 \leqslant m \iff m \geqslant \frac{d+2}{2}.$$

- 上述几何事实是下面两个引理的基础.

Lemma 4.12 (Wolff的技术引理-I)

设$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0,1)$. $T = T_e^\delta(a)$, $T_j = T_{e_j}^\delta(a_j)$是$\delta$-tube, $j = 1, \cdots, N$. 设$\{T_j\}$是的δ-分离的tubes,且满足

$$T \cap T_j \neq \emptyset, \quad j = 1, 2, \cdots, N; \quad \text{且 } |e_j - e| \geqslant \alpha\beta.$$

则对$j = 1, \cdots, N$, 有

$$\begin{aligned} &\#\{\ell : \ |e_\ell - e_j| \leqslant \beta, \ T_\ell \cap T_j \neq \emptyset, \ d(T_j \cap T_\ell, T_j \cap T) \geqslant \gamma\} \\ \leqslant & C(d, \alpha)\beta\delta^{-1}\gamma^{2-d}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Definition 4.13

δ-分离的tube集合$\{T_j\}_1^N$是(N, δ)-Hairbrush, 如果存在一个δ-tube T满足

$$T \cap T_j \neq \emptyset, \quad j = 1, \cdots, N.$$

Lemma 4.14 (Wolff的技术引理-II)

设$\{T_j\}_1^N$是(N,δ)-Hairbrush. 则对任意$\varepsilon>0$及 $d/(d-1)\leqslant p\leqslant 2$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{\ell=1}^{N}\chi_{T_\ell}\Big)^p dx\leqslant C(d,p,\varepsilon)\delta^{d-(d-1)p-\varepsilon}N\delta^{d-1} \tag{4.31}$$

Theorem 4.15 (基于Hairbrushes方法的Wolff定理)

设$0<\delta<1$ 及$\lambda>0$,则对于任意的$f(x)\in L^d(\mathbb{R}^d)$,有

$$\|\mathcal{K}_\delta f\|_{L^d(S^{d-1})}\leqslant C(d,\varepsilon)\delta^{\frac{2-d}{2d}-\varepsilon}\|f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)},\ \ \forall\,\varepsilon>0. \tag{4.32}$$

特别, 对$\mathbb{R}^d$上所有Besicovitch集合B,均有

$$\dim_H(B)\geqslant d-\beta d=(d+2)/2,\ \ \beta=\frac{d-2}{2d}$$

.

■ **Kakeya猜想的算术方法:** 几何方法源于Burgain, 后经Katz-Tao的发展, 在高维空间可以证明Bescovitch集的Hausdorff及Minkowski维数具有形如

$$\dim(B) \geqslant cd + 1 - c, \quad c > \frac{1}{2}$$

的下界估计.特别地, 我们有

$$\underline{\dim}_M(B), \ \dim_H(B) \geqslant \frac{6d}{11} + \frac{5}{11}.$$

显然, 当$d > 12$时,优于Wolff的维数估计$(d+2)/2$.

■ **算术方法理念** 设E是m维的Bescovitch集合, 包含任意方向的线段. 为方便起见,视这些线段是连接超平面$X_0 = \{x_d = 0\}$上的点$(x, 0)$ 与超平面$X_1 = \{x_d = 1\}$上的点$(y, 0)$的连线. 进而, 记

$$G \triangleq \Big\{(x, y)\text{所有按上述方式获得pairs的集合}\Big\} \subset \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

事实上, 定义减法影射

$$\pi_{-1} : \mathbb{R}^{d-1} \longmapsto \mathbb{R}^{d-1}, \quad \pi_{-1}(x, y) = x - y.$$

则$\pi_{-1}(G)$是$d-1$维的集合.

另一方面,$\dim(E)=m$, 期望多数slices $\{x\in E: x_d=t\}$是$m-1$的, 但是这些slices包含了集合$\{(1-t)x+ty: (x,y)\in G\}$. 因此, 如果记$\pi_r(G)$表示影射

$$\pi_r: (x,y)\longmapsto x+ry; \quad \pi_\infty: (x,y)\longmapsto y$$

那么我们期望对大多数斜率$r(r\neq -1)$, $\pi_r(G)$是$m-1$维的.

- 显然,低维的Kakeya集在“减法”影射π_{-1}的“大范围”(large range)与其它投影的“小范围”(small range)之间产生某些冲突.例如: π_0与π_∞均具有$m-1$ 维值域, G最多具有$2(m-1)$维值域, 因此

$$2(m-1)\geqslant d-1, \implies m\geqslant \tfrac{d+1}{2}.$$

- 上述观察源于Kahane 1969. 然而, 直到1999年Bourgain将这些概念与Gowers关于Szemeredi定理(堆垒组合学)的证明理念相结合, Kakeya问题才有进展. 这里无意深入讨论,展示一些结果足以说明如何给出投影$\pi_{-1}(G)$尺寸的非平凡控制估计. 例如: 对于有限集G,Bourgain证明如下控制估计

$$\#\pi_{-1}(G)\leqslant \min\left(\pi_0(G)),\pi_1(G)),\pi_\infty(G)\right)^{2-\sigma}, \quad \sigma=1/13.$$

- Katz随后将其提升到$\sigma = 1/6$. 这个结果分别对应的Minkowshi维数的下界估计为

$$m \geqslant \tfrac{11}{13}(d-1)+1, \quad \sigma = \tfrac{1}{13}; \quad m \geqslant \tfrac{6}{13}(d-1)+1, \quad \sigma = \tfrac{1}{6}.$$

该方法完全是纯组合问题,依赖于形如下面的恒等式

$$\begin{cases} (a-b) = (a-b') - (a'-b') + (a'-b), \\ a+b = c+d \iff a-d = c-b \end{cases}$$

- 如果能证明$\sigma = 1$,也就证明了Kakeya猜想. 通过考虑增加投影的方式, 如:

$$\#\pi_{-1}(G) \leqslant \min\left(\pi_0(G)), \pi_1(G)), \pi_2(G)), \pi_\infty(G)\right)^{2-\sigma}, \quad \sigma = 1/4,$$

这种增加巨多的投影($\sim \exp\exp(C\log(1/\varepsilon)^2)$的方法, 仅仅可获得$\sigma = 0.32486$.

- 几何方法对于低维Kakeya更有效, 算术技术对于高维更有效. 算术方法仅依赖Besicovitch集合的Slices,而非完整的Besicovitch集,因此可能会损失~ 1维.;

■ **Kakeya极大猜想与Kakeya猜想的关系总结** 任意小测度的Besicovitch集合可作用为构造Kakeya极大函数L^p无界的反例. 为说明起见, 引入如下概念:

- 设$\mathbb{T}$是δ-方向分离的tubes的集合($\sim \delta^{1-d}$). 对固定的$0 < \lambda \leqslant 1$, $\forall T \in \mathbb{T}$, 称子集$Y(T) \subseteq T$ 的密度是λ, 如果$|Y(T)| = \lambda |T|$.
- Kakeya极大函数在L^p范数的估计等价于

$$\Big| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} Y(T) \Big| \gtrapprox \lambda^p \delta^{d-p}. \tag{4.33}$$

- 假设(4.33)对$\lambda = 1$成立, $Y(T) = T$. 则(4.33) 意味着Besicovitch集合至少具有Minkowski维数为p
- 设(4.33)对$\lambda \approx 1$成立, 则(4.33) 意味着(但不等价于)Besicovitch集合至少具有Hausdorff维数为p.
- Kakeya极大函数猜想意味着Hausdorff猜想, Hausdorff猜想意味着Minkowshi猜想.

■ **Kakeya 极大函数离散化形式** Kakeya猜想的离散化形式是一个较强的版本. 假设**T**是$\mathbb{R}^d$中两两δ角度分离、尺度为$\delta\times 1$的tube的集合.那么, 利用Kakeya极大函数猜想的对偶形式可以推出:

$$\Big\|\sum_{\mathbf{T}}\chi_{\mathbf{T}}\Big\|_p \lessapprox \delta^{\frac{d}{p}-1}, \forall\, p \geqslant \frac{d}{d-1}. \tag{4.34}$$

简单的估计表明如果(4.34)对某个p_0成立, 则所有Besicovitch集合的Hausdorff及Minkowski维数至少是

$$\dim_H(B) \geqslant d-\beta p_0' = d-(1-\frac{d}{p_0'})p_0' = p_0'.$$

■ **Wolff的方法分析**

- 类同于维数估计,Wolff的方法也可获得Kakeya极大函数对应的估计. 处理极大函数存在两个技术问题. 其一是小角度问题-"鬃毛"(bristles)型brush可能平行于stem T_0,产生更小的测度. 其二是许多$Y(T)$可能仅仅聚积在一端,这导致了brush的尺寸的下界估计中困难(而非在整个T上扩散相).

- 通过Wolff的两端归结可以克服第二个困难.该归结使我们无妨假设集合$Y(T)$满足

$$\big|Y(T)\cap B(x,r)\big| \lessapprox r^{\sigma}\lambda|T|, \quad \text{某个 } \sigma>0,\ \forall\ B(x,r).$$

即:$Y(T)$一定扩散而非聚积在tube的一端, $Y(T)$中两点的平均分离≈ 1. 如果存在过多的集合$Y(T)$不满足该估计, 就会导致在一个$r\times\delta$tube聚积而非$1\times\delta$上聚积. 这样,就可以使用rescale技术. 该技术源于Wolff的尺度归纳策略.

- 之后不久, 就意识到小角度问题几乎可以完全消除. 如同两端归纳几乎可以消除“小距离问题”一样, 所谓的“双线性归纳” 可以消除“小角度问题”. 基本思想用双线性估计形式

$$\Big\|\Big(\sum_{T\in\mathbf{T}}\chi_T\Big)\Big(\sum_{T'\in\mathbf{T}'}\chi_{T'}\Big)\Big\|_{p'/2}\lesssim \delta^{2(\frac{d}{p}-1)},\ \text{代替}\ \Big\|\sum_{T\in\mathbf{T}}\chi_T\Big\|_{p'}\lesssim\delta^{\frac{d}{p}-1},\quad (4.35)$$

这里$\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$表示两族tubes满足$\mathbf{T}$ 与$\mathbf{T}'$的方向的夹角~ 1. 利用TVV 的技术可以证明二者等价.

★ Kakeya猜想与前面的三大猜想密切相关. 认真考察所实施的方法, 就会发现局部光滑性猜想、Bochner-Riesz猜想、限制性猜想均可推出Kakeya猜想. 相反,给定Kakeya估计,同样可以获得非平凡的局部光滑性估计、Bochner-Riesz估计、限制性估计等.

★ 以限制性估计(对偶形式或延拓算子)说明Kakeya估计的作用, 目标是估计$\widehat{fd\sigma}$的L^p范数. 典型的测试模型就是Knapp反例,即取g聚积在以ω 为方向δ-cap上, 则$\widehat{gd\sigma}$聚积在以ω为方向的$\delta^{-1}\times\delta^{-2}$的tube $\mathbf{T}$之上. 于是,可以将$\widehat{fd\sigma}$进行"波包"分解

$$\widehat{fd\sigma}\approx\sum_{\mathbf{T}}c_{\mathbf{T}}e^{i\omega\cdot x}\chi_{\mathbf{T}}(x). \tag{4.36}$$

利用标准的限制性估计方法(如:正交性等),振荡和可以归结为平方函数估计,即

$$\Big\|\sum_{\mathbf{T}}c_{\mathbf{T}}e^{i\omega\cdot x}\chi_{\mathbf{T}}(x)\Big\|_p\lesssim\Big\|\Big(\sum_{\mathbf{T}}\Big|c_{\mathbf{T}}e^{i\omega\cdot x}\chi_{\mathbf{T}}(x)\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p. \tag{4.37}$$

然而, 估计平方函数也非易事, 通常要损失δ的一个幂次等.

★ 平方函数的估计可以归结为如下非振荡和式

$$\left\|\left(\sum_{\mathbf{T}} |c_{\mathbf{T}}|^2 \chi_{\mathbf{T}}(x)\right)\right\|_{p/2}^{\frac{1}{2}}$$

的估计，这就可以通过Kakeya估计来实现.

★ 最近，该策略成功应用到波动方程解的估计并取得进展. 主要思路是将波分解成“波包”(wave packets,或Knapp例子)的和,采用如下步骤:

(I) 利用锥上的限制性估计替代用平方函数估计“波包”的求和;

(II) 利用Kakeya估计(针对射线而非任意tube所对应的估计)来估计这些函数.

这是目前为止所能获得的最好的估计.

分离性(decoupling)的直观概念与朴素观点

- 任给Banach空间X中的有限集$\{f_j\}_{j\in I}$,三角不等式意味着

$$\Big\|\sum_{j\in I} f_j\Big\|_X \leqslant \sum_{j\in I}\|f_j\|_X.$$

当f_j具有某种振荡时,人们期望本质改进上述估计. 例如: **设X是Hilbert空间**, $\{f_j\}_{j\in I}$相互正交, 根据Pythagorean定理,有

$$\Big\|\sum_{j\in I} f_j\Big\|_X \leqslant \Big(\sum_{j\in I}\|f_j\|_X^2\Big)^{\frac12}.$$

相比之下, 对Banach空间X而言,仅能获得(三角不等式与Cauchy-Schwarz):

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\in I} f_j\Big\|_X \leqslant& \sum_{j\in I}\|f_j\|_X && \text{(三角不等式)}\\ \leqslant&(\#I)^{\frac12}\Big(\sum_{j\in I}\|f_j\|_X^2\Big)^{\frac12}. && (\text{Cauchy}-\text{Schwarz}) \qquad (4.38)\end{aligned}$$

由此可见, Hilbert空间的正交性产生了“平方根因子”的消失的作用!

■ **分离性的理念:** 一般说来, 称$\{f_j\}_{j\in I}$在X中展现分离性(decoupling)是指:

$$\Big\|\sum_{j\in I} f_j\Big\|_X \lesssim_\varepsilon (\#I)^\varepsilon \Big(\sum_{j\in I}\|f_j\|_X^2\Big)^{\frac12}, \quad \forall \varepsilon>0. \tag{4.39}$$

这相当于获得在$\|\cdot\|_X$意义下几乎"平方根因子"的消失.

- L^2(或一般Hilbert空间)中的**正交性** $\Longrightarrow$ **分离性**.
- 当$p<2$时, **L^p空间不存在分离性**! 事实上, 若$\{f_j\}$具有不交的支集, 则

$$\Big\|\sum_{j\in I} f_j\Big\|_{L^p} = \Big(\sum_{j\in I}\|f_j\|_{L^p}^p\Big)^{\frac1p} \gg \Big(\sum_{j\in I}\|f_j\|_p^2\Big)^{\frac12}, \quad p<2.$$

- 当$p=\infty$时,鉴于$\{f_j\}$可能具相同的相并且在相同的局部化区域达到L^∞范数, 因此不能期望在$\|\cdot\|_\infty$意义下的"分离性".
- **总结与推测**: **L^p具有分离性的必要条件是$p\in(2,\infty)$**! 因此,对某些$2<p<\infty$, 可以获得相应的"分离性".

- $L^p(2 < p < \infty)$中具分decoupling现象的例子与分离方式
  - 考虑$p = 4$, 假设$\{f_j\}_{j=1}^N$是双正交性, 即$f_j f_k$ $(1 \leqslant j < k \leqslant N)$在$L^2$框架下是逐点正交的, 则

$$\Big\|\sum_{j=1}^N f_j\Big\|_{L^4}^2 = \Big\|\Big(\sum_{j=1}^N f_j\Big)^2\Big\|_{L^2} = \Big\|\sum_{1\leqslant j,k\leqslant N} f_j f_k\Big\|_{L^2} \lesssim \Big(\sum_{1\leqslant j,k\leqslant N} \|f_j f_k\|_{L^2}^2\Big)^{\frac12}$$
$$= \Big\|\Big(\sum_{1\leqslant j,k\leqslant N} |f_j f_k|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^2} = \Big\|\sum_{j=1}^N |f_j|^2\Big\|_{L^2} \leqslant \sum_{j=1}^N \big\||f_j|^2\big\|_{L^2} = \sum_{j=1}^N \|f_j\|_{L^4}^2.$$

  由此获得L^4中的“分离性”.

  - 类似地, 假设$\{f_j\}_{j=1}^N$是三正交性, 即$f_i f_j f_k$ $(1 \leqslant i < j < k \leqslant N)$相互几乎正交. 同样可以建立$L^6$中的“分离性”. 如此等等.
  - 对$\forall p \in (2, \infty)$, 考虑$\{\omega_j f_j\}$, $\omega_j = \pm 1$是独立的随机符号, 则Khinchin不等式

$$\mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{j=1}^N \omega_j f_j\Big\|_{L^p}^p\Big) \sim \Big\|\Big(\sum_{j=1}^N |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p}^p \lesssim \Big(\sum_{j=1}^N \|f_j\|_{L^p}^2\Big)^{p/2},$$

  就展示了L^p意义下的“分离性”.

■ 调和分析中分离性(decoupling)的来源、应用与认识

- 分离性方法源于Wolff关于波动方程解的正则性及Bourgain关于Schrödinger方程解的Strichartz估计的研究.
- 对$2 < p < \infty$的某些指标, Bourgain、Demeter在"限制性理论"的框架下建立了L^p "分离性"定理, 从而奠定了分离性方法的基础. 在期待的范围内,解决了"离散限制性猜测". 作为应用,Bourgain-Demeter证明了有理与无理环上Schrödinger方程解的Strichartz估计.
- Decoupling引人注目的应用却是在数论领域, 如: Bourgain、Demeter, Guth等对多项式曲线所建立的分离性定理, 一举解决了解析数论中的Vinogradov猜想. 进而,在Diophatine 问题, exponential sums 问题, Riemann-Zeta函数问题等公开问题取得突破.
- 分离性方法的核心揭示了L^p空间的内在消失结构. 从某种意义上来讲,是对非Hilbert空间缺少正交性的补偿.

Decoupling version of restriction conjecture

■ **分离性猜想与限制性猜想紧密相关**. 为叙述方便,以抛物面为例来说明两者的关系.

设P^{d-1}是$\mathbb{R}^d$ 中紧的抛物面,记

$$\begin{cases} P^{d-1} = \Big\{(\xi',\xi_d)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}:\ \xi_d=|\xi'|^2, |\xi'|\leqslant 1\Big\}; \\ \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}) \triangleq \Big\{(\xi',\xi_d)\in\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}: |\xi_d-|\xi'|^2|\leqslant R^{-1}, |\xi'|\leqslant 1\Big\}; \\ \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1})\subset P_{R^{-1}}\triangleq \cup\tau \ \text{ 表示 } \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}) \text{ 有限重覆盖}; \\ \tau \text{ 表示尺度为 } R^{-1/2}\times\cdots\times R^{-1/2}\times R^{-1} \text{ tube.} \end{cases}$$

Conjecture 4.2 (限制性猜想)

设P^{d-1}是$\mathbb{R}^d$中紧的抛物面,相应的限制性猜想:

$$\|\hat{f}|_{P^{d-1}}\|_{L^q(P^{d-1},d\sigma)}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \iff p<\frac{2d}{d+1},\ q\leqslant\frac{d-1}{d+1}p'; \tag{4.40}$$

限制性猜想(4.40) 的等价对偶形式

$$\|(gd\sigma)^\vee\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|g\|_{L^{q'}(P^{d-1},d\sigma)} \iff p'>\frac{2d}{d-1}, p'\geqslant\frac{d+1}{d-1}q \tag{4.41}$$

如果(4.41) 成立, 由Hölder 不等式, 我们有

$$\|(gd\sigma)^\vee\|_{\dots} \leqslant R^\varepsilon\|g\|_{\dots} \quad \forall\varepsilon>0,\ R\gg 1 \tag{4.42}$$

为了方便起见,用$X \lessapprox Y$表示$X \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon Y$, 则(4.42)可以更简洁的表达为

$$\|(gd\sigma)^\vee\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(B(0,CR))} \lessapprox \|g\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(P^{d-1},d\sigma)}. \tag{4.43}$$

反之,如果(4.42)成立,利用ε-removing准则, 就得到限制性猜想的等价形式:

Conjecture 4.3 (限制性猜想的等价形式-局部版本I)

设g为定义在P^{d-1}上的函数,则

$$\|(gd\sigma)^\vee\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(B_R)} \lessapprox \|g\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(P^{d-1},d\sigma)} \tag{4.44}$$

由Heisenberg不确定性原理知,(4.44)等价于如下形式:

Conjecture 4.4 (限制性猜想,局部版本II)

$$\|f\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(B_R)} \lessapprox R^{-\frac{d+1}{2d}}\|\hat{f}\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(\mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}))}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp}\hat{f} \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}) \tag{4.45}$$

进而,证明(4.45)又可以归结证明下面表面上更弱的情形:

Conjecture 4.5 (限制性猜想，局部形式III)

$$\begin{cases} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(B_R)} \lessapprox R^{-1}\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}))}, \\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}\hat{f} \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}). \end{cases} \tag{4.46}$$

事实上,(4.45)和(4.46)等价. 限制性猜想归结为证明**猜想4.5**. 为此,分解f如下:

$$f \sim \sum_\tau f_\tau, \text{ 其中 } \hat{f}_\tau := \hat{f}\chi_\tau.$$

不妨假设$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}))} \leqslant 1$, (4.46)可以表现为

$$\Big\|\sum_\tau f_\tau\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(B_R)} \lessapprox R^{-1}, \tag{4.47}$$

为了证明(4.47), 实际上,它等价于形式上更强的情形

$$\Big\|\sum_\tau f_\tau\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)} \lessapprox R^{-1}. \tag{4.48}$$

由不确定性原理知(4.47)和(4.48)的难度是相当的. 由三角不等式可得平凡估计:

$$\Big\|\sum_{\tau} f_\tau\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Big\|\sum_{\tau} |f_\tau|\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.49}$$

充分利用f_τ之间的振荡(消失性),可以期待把(4.49)右边ℓ^1范数改进为ℓ^2范数,即:

$$\Big\|\sum_{\tau} f_\tau\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)} \lessapprox \Big\|\Big(\sum_{\tau} |f_\tau|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)} \tag{4.50}$$

Conjecture 4.6 (square function estimate)

$$\Big\|\sum_{\tau} f_\tau\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)} \lessapprox \Big\|\Big(\sum_{\tau} |f_\tau|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\frac{2d}{d-1}(\mathbb{R}^d)}, \quad \text{supp}\, \hat{f} \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}). \tag{4.51}$$

事实上,

decoupling conjecture (square function estimate)

$$+$$

wave packet decomposition $\oplus$ Kakeya estimates

$$\Downarrow$$

restriction conjecture

■ 利用Knapp函数及Khinchin不等式(随机方法), **限制性猜想 $\Longrightarrow$ Kakeya极大猜想**:

Conjecture 4.7 (Kakaya 极大猜想的离散版本)

设$\Omega \subset S^{d-1}$ 是$R^{-\frac{1}{2}}$ 极大分离方向构成的集合, 则

$$\Big\| \sum_{\omega \in \Omega} \chi_{T_\omega} \Big\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \Big(\sum_{\omega\in\Omega} |T_\omega| \Big)^{\frac{d-1}{d}} \tag{4.52}$$

$\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$表示形如$R^{-\frac{1}{2}} \cdots \times R^{-\frac{1}{2}} \times R^{-1}$长方体且$T_\omega$ 的方向为ω.

反之,因为Kakeya 极大函数估计仅仅体现尺度大小的控制,而振荡在限制性估计中起重要作用, 因此,**Kakeya极大猜想$\not\Longrightarrow$限制性猜想**. 但是, 如果加上消失性条件比如平方函数估计(4.51),则从Keyaya 极大猜想也可推出限制性猜想. 事实上,(4.51)本身也意味着Kakeya极大猜想,参见【11】.

decoupling conjecture (square function estimate)

$\Downarrow$

restriction conjecture

$\Downarrow$

maximal Kakeya conjecture

Bourgain-Demeter ℓ^2-decoupling theorem

- **Square function estimate-强性分离性**

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}\Big\|\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}|f_\tau|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p}, \quad \forall 2\leqslant p\leqslant \tfrac{2d}{d-1}, \tag{4.53}$$

功能强大,许多著名猜想的解决均归结为分离性猜想. 2维情形也已解决(正交性), 高维情形仍是公开的! Burgain-Demeter解决分离性不等式(弱型square function estimate):

Theorem 4.16 (Bougain-Demeter 2015：超曲面S上分离性定理的表述形式-I)

设S是$\mathbb{R}^d$中紧的C^2光滑超曲面, 具有正定的二次基本形式, S_δ表示S的δ邻域, 满足

$$S_\delta\subset P_\delta \triangleq \cup\tau, \quad \tau \text{ 表示形如 } \sqrt{\delta}\times\cdots\sqrt{\delta}\times\delta \text{ 长方体.}$$

假设supp$\hat{f}\subset S_\delta$,则

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\frac{d-1}{4}+\frac{d+1}{2p}-\varepsilon}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^2\Big)^{1/2}, \quad \forall p\geqslant \frac{2(d+1)}{d-1}. \tag{4.54}$$

端点情形与平凡情形$p=2$插值就得

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^2\Big)^{1/2}, \quad \forall 2\leqslant p\leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}. \tag{4.55}$$

- 球面S^{d-1}或抛物面的截断形式是定理的典型情形. 不等式(4.54)与(4.55)右边求和次序交换,就对应**分离性猜想**(srong-version)!
- **抛物版本的Wolff-不等式**

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\frac{d-1}{2}+\frac{d}{p}-\varepsilon}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^p\Big)^{1/p}, \quad \forall p \geqslant \frac{2(d+1)}{d-1}. \tag{4.56}$$

是分离性不等式与如下Hölder不等式:

$$\Big(\sum_{\tau}\|f_\tau\|_p^2\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \delta^{\frac{d-1}{4}(\frac{2}{p}-1)}\Big(\sum_{\tau}\|f_\tau\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.57}$$

的直接结果.

- **著名open问题**: Sharp型分离型不等式(即使小指标范围)

$$\|f\|_p \leqslant C(d,p)\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^2\Big)^{1/2}, \quad \forall 2 \leqslant p \leqslant \frac{2d}{d-1}. \tag{4.58}$$

当$d=2, p\leqslant 4$时,(4.58)成立. 一般情形异常困难,尚未有结果.

- **定理4.16深刻地揭示了L^p分离性的内在结构**. 前期Bourgain采用Wolff尺度归纳及BCT的多线性技术, 解决了$p=\frac{2d}{d-1}$的情形; Demeter利用关联几何与离散限制性估计解决了$p>\frac{2(d+2)}{d-1}$的情形.

■ **超曲面S上分离性(Decoupling)定理的表述形式-II** 主曲率为零的代数超曲面(如:锥面), 定义截断锥面

$$C^{d-1}=\Big\{\Big(\xi_1,\cdots,\xi_{d-1},\sqrt{\xi_1^2+\cdot+\xi_{d-1}^2}\Big),1\leqslant\sqrt{\xi_1^2+\cdot+\xi_{d-1}^2}\leqslant 2\Big\}.$$

用$\mathcal{N}_\delta(C^{d-1})$表示其$\delta$邻域,$P_\delta(C^{d-1})$表示形如$\sigma=1\times\delta\times\sqrt{\delta}\cdots\times\sqrt{\delta}$的"方体"($\mathbb{R}^3$对应"Plate" $1\times\delta\times\sqrt{\delta}$) 的集合, 形成$\mathcal{N}_\delta(C^{d-1})$的有限重覆盖.

Theorem 4.17 (锥面对应的分离性定理2015)

设$\mathrm{supp}\hat{f}\subset\mathcal{N}_\delta(\mathrm{C}^{\mathrm{d}-1})$,则对$\forall\varepsilon>0$,

$$\|f\|_p\lesssim_\varepsilon \delta^{-\frac{d-2}{4}+\frac{d}{2p}-\varepsilon}\Big(\sum_{\sigma\in P_\delta}\|f_\sigma\|_p^2\Big)^{1/2},\quad \forall p\geqslant\frac{2d}{d-2}, \tag{4.59}$$

$$\|f\|_p\lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}\Big(\sum_{\sigma}\|f_\sigma\|_p^2\Big)^{1/2},\quad \forall 2\leqslant p\leqslant\frac{2d}{d-2}. \tag{4.60}$$

这里$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $f_\sigma=(\hat{f}\big|_\sigma)^\vee$是$f$的Fourier变换在$\sigma$上的限制.

- 锥面上的分离性估计证明非常简单,是椭圆或抛物型超曲面情形一个令人吃惊的应用.

Remarks 5

- 根据定理4.17中分离性估计与Hölder不等式就得Wolff型估计

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{-\frac{d-2}{2}+\frac{d-1}{p}-\varepsilon}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^p\Big)^{1/p}, \quad \forall p \geqslant \frac{2d}{d-2}. \tag{4.61}$$

由此可推出波动方程解的局部光滑性估计(注意维数变化)、锥乘子的L^p估计与相应的极大函数的有界性等. 详见Bourgain、Wolff、Laba-Wolff的工作.

分离性在离散限制性估计及PDE中的直接应用

由Minkowski不等式，当$p>2$时，分离性不等式比平方函数估计(4.53)(分离性猜想)弱. 尽管如此，Bourgain等依然应用分离性定理解决著名Vinogradov猜想或推动了不同数学领域著名猜想的研究. 作用直接推论,率先陈述在离散限制性猜想及PDE中应用.

设$S\in\mathbb{R}^d$是Gauss曲率非零的C^2紧超曲面，$\Lambda\subset S$是任意的$\delta^{1/2}$ 分离子集.

Stein-Tomas限制性估计

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|f\|_{L^2(S,d\sigma)},\quad \forall p\geqslant\frac{2(d+1)}{d-1},\ f\in L^2(S) \tag{4.62}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases}\Big(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}\Big|\sum\limits_{\Lambda}a_\xi e(\xi\cdot x)\Big|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\lesssim\delta^{\frac{d}{2p}-\frac{d-1}{4}}\|a_\xi\|_{\ell^2(\Lambda)},\ a_\xi\in\mathbb{C},\\ e(a)\triangleq e^{2\pi\xi\cdot x},\ p\geqslant\frac{2(d+1)}{d-1},\ R\sim\delta^{-\frac{1}{2}},\ \forall\, 0<\delta\leqslant 1.\end{cases} \tag{4.63}$$

因此，Stein-Tomas定理刻画了空间尺度与频率分离尺度满足$R\sim\delta^{-\frac{1}{2}}$情形下指数和振荡的$L^p$-平均.

Decoupling定理的应用(I)-离散限制型估计

利用分离性定理,在尺度$R > \delta^{-1}$时,可以证明离散限制性具有更强消失现象,即:

Theorem 4.18 (离散限制现象-指数和强振荡的L^p刻画-I)

设$\Lambda \subset S$是一$\delta^{1/2}$ 分离集, $R \gtrsim \delta^{-1}$, 则对$\forall \varepsilon > 0$及$p \geqslant \frac{2(d+1)}{d-1}$有

$$\Big(\frac{1}{B_R}\int_{B_R} \big|\sum_{\Lambda} a_\xi e(\xi\cdot x)\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim_\varepsilon \delta^{\frac{d+1}{2p}-\frac{d-1}{4}-\varepsilon}\|a_\xi\|_{\ell^2(\Lambda)}. \qquad (4.64)$$

- 指数和强振荡的L^p估计(4.64) 是分离性定理4.16的直接推论:

$$\|f\|_p \lesssim_\varepsilon \delta^{c_p}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|f_\tau\|_p^2\Big)^{1/2}, \quad \mathrm{supp}(\hat{f}) \subset \mathcal{N}_\delta, \qquad (4.65)$$

就意味着:对任意的g: $S \longmapsto \mathbb{C}$和$R \gtrsim \delta^{-1}$,成立

$$\Big(\int_{B_R}|\widehat{gd\sigma}|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant \cdots \lesssim \delta^{c_p}\Big(\sum_{\tau\in P_\delta}\|\widehat{g_\tau d\sigma}\|^2_{L^p(w_{B_R})}\Big)^{1/2}, \qquad (4.66)$$

这里$g_\tau = gI_\tau$, 权函数w_{B_R}满足$\mathrm{supp}\widehat{w_{B_R}} \subset B(0,R^{-1})$及

$$I_{B_R}(x) \lesssim w_{B_R}(x) \leqslant \Big(1+\frac{|x-c(B_R)|}{R}\Big)^{-10d} \qquad (4.67)$$

记$\tau_\delta(\xi)$是以$\xi \in S$为中心的$\delta^{1/2}$-cap，在(4.66)中选取

$$g = \sum_{\xi \in \Lambda} a_\xi \sigma(\tau_\delta(\xi))^{-1} I_{\tau_\delta(\xi)}(x),$$

令$\delta \to 0$就得(4.64). 进而,从(4.64)与Hölder不等式就可推出

$$\delta^\varepsilon \|a_\xi\|_{\ell^2(\Lambda)} \lesssim_\varepsilon \Big(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \Big| \sum_{\Lambda} a_\xi e(\xi \cdot x) \Big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|a_\xi\|_{\ell^2(\Lambda)}, \qquad (4.68)$$

其中$1 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}$, $R \gtrsim \delta^{-1}$.

Corollary 4.19 (周期指数多项式的L^p估计)

设$S \in \mathbb{R}^d$具有正定二次型的C^2紧超曲面, $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^d \cap RS$,则

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^d} \Big| \sum_{z \in \mathcal{E}} a_z e^{2\pi i x \cdot z} \Big|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon \Big(\sum_{z \in \mathcal{E}} |a_z|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \ p \leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}. \tag{4.69}$$

Corollary 4.20 (特征函数的L^p估计)

设ϕ_E是$\mathbb{T}^d$上的特征函数,即$-\Delta \phi_E = E \phi_E$,则

$$\|\phi_E\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \lesssim E^\varepsilon \|\phi_E\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}, \quad \forall p \leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}. \tag{4.70}$$

Corollary 4.21 (周期Schrödinger酉群的时空估计)

设$d \geqslant 1$, $\mathrm{supp} \hat{f} \subset \mathbb{Z}^d \cap B(0,R)$, 则

$$\|(e^{it\Delta} f)(x)\|_{L^q(\mathbb{T}^{d+1})} \ll R^\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}, \quad \forall q \leqslant \frac{2(d+2)}{d}. \tag{4.71}$$

- 当$d=2,3$, $p=4$时，有如下经典的估计:

$$\begin{cases} \|\phi_E\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \leqslant C\|\phi_E\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}, \text{ (Zygumund-Cook 估计)}, \\ \|\phi_E\|_{L^4(\mathbb{T}^3)} \lesssim_\varepsilon E^\varepsilon\|\phi_E\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \quad \text{(算术方法)}. \end{cases} \tag{4.72}$$

类似地,对自由的周期Schrödinger酉群也有估计:

$$\begin{cases} \|(e^{it\Delta}f)(x)\|_{L^4(\mathbb{T}^{1+1})} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^1)}, \quad \text{(Bourgain 估计)}, \\ \|(e^{it\Delta}f)(x)\|_{L^4(\mathbb{T}^{2+1})} \lesssim_\varepsilon R^\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}, \quad \text{(多线性方法)}. \end{cases} \tag{4.73}$$

- 当$d\geqslant 4$时，之前结果不涉及形如(4.70)的特征函数的估计！
- 环上的**特征函数的L^p-猜想**:

$$\|\phi_E\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \leqslant C_q\|\phi_E\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}, \quad q<\frac{2d}{d-2}, \tag{4.74}$$

$$\|\phi_E\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \leqslant C_q E^{\frac{1}{2}(\frac{d-2}{2}-\frac{d}{q})}\|\phi_E\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}, \quad q>\frac{2d}{d-2}. \tag{4.75}$$

- 利用Hardy-Littlewood圆法，Bourgain证明当$q>\frac{2(d+1)}{d-3}$时,(4.75)成立. 需要指出的是：我们完全不涉及数论方法,而仅仅采用调和分析的技术！

Decoupling定理的应用(II)-经典或无理环上的Strichartz估计

Torus上Schrödinger方程解的Strichartz估计,可以归结为当频率属于格点时对应的离散限制型估计. 记

$$P^d(N) \triangleq \Big\{\xi \triangleq (\xi_1, \cdots, \xi_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1} : \xi_{d+1} = \xi_1^2 + \cdots + \xi_d^2, 0 \leqslant |\xi_j|_{j\leqslant d} \leqslant N\Big\}.$$

Theorem 4.22 (离散限制-抛物面上的格点情形)

设$a_\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$,则有如下离散限制性估计: (i) 若$d \geqslant 3$,

$$\Big\| \sum_{\xi \in P^d(N)} a_\xi e(\xi \cdot x) \Big\|_{L^p(\mathbb{T}^{d+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\frac{d}{2} - \frac{d+2}{p} + \varepsilon} \|a_\xi\|_{\ell^2}, \ p \geqslant \frac{2(d+3)}{d}, \tag{4.76}$$

$$\Big\| \sum_{\xi \in P^d(N)} a_\xi e(\xi \cdot x) \Big\|_{L^p(\mathbb{T}^{d+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\varepsilon} \|a_\xi\|_{\ell^2}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d}. \tag{4.77}$$

(ii) 若$d = 1, 2$,

$$\Big\| \sum_{\xi \in P^d(N)} a_\xi e(\xi \cdot x) \Big\|_{L^p(\mathbb{T}^{d+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\varepsilon} \|a_\xi\|_{\ell^2}, \quad p = \frac{2(d+2)}{d}. \tag{4.78}$$

- (i)的证明借助于圆法、分离性估计$(4.55)_{d+1}$的情形,采用Stein-Tomas方法可以非常简单地证明(ii),主要基于平面上圆包含很少的"格点"!
- Bourgain曾猜测(ii)对$d \geqslant 3$也是正确的(不计N^ε的损失). 事实上,定理4.18 不仅意味着定理4.22成立,同时还有更一般的版本.

无理Tori上的Laplace算子与相应的Schrödinger酉群 记$\frac{1}{2} < \theta_1, \cdots, \theta_d < 2$,对$\phi(x) \in L^2(\mathbb{T}^d)$,考虑无理Tori $\Pi_{i=1}^d \mathbb{R}/(\theta_i \mathbb{Z})$上的Laplace算子:

$$\Delta\phi(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{(\xi_1, \cdots, \xi_d) \in \mathbb{Z}^d} (\xi_1^2\theta_1 + \cdots + \xi_d^2\theta_d)\hat{\phi}(\xi_1, \cdots, \xi_d) \times e(\xi_1\theta_1 + \cdots + \xi_d x_d), \tag{4.79}$$

及相应的Schrödinger酉群

$$e^{it\Delta}\phi(x_1, \cdots, x_d, t) = \sum_{(\xi_1, \cdots, \xi_d) \in \mathbb{Z}^d} \hat{\phi}(\xi_1, \cdots, \xi_d) e(\xi_1\theta_1 + \cdots + \xi_d x_d + t(\xi_1^2\theta_1 + \cdots + \xi_d^2\theta_d)). \tag{4.80}$$

Theorem 4.23 (无理Tori上的Strichartz估计)

设$\phi(x)\in L^2(\mathbb{T}^d)$满足$\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-N,N]^d$,则对$\forall\varepsilon>0$, $I\subset\mathbb{R}$满足$|I|\gtrsim 1$, 有

$$\|e^{it\Delta}\phi\|_{L^p(\mathbb{T}^d\times I)}\lesssim_\varepsilon N^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}+\varepsilon}|I|^{\frac{1}{p}}\|\phi\|_2,\quad p\geqslant\frac{2(d+2)}{d}. \tag{4.81}$$

The sketch of Proof 对$-N\leqslant\xi_1,\cdots,\xi_d\leqslant N$,定义

$$\eta_i=\frac{\theta_i^{1/2}\xi_i}{4N},\quad a_\eta=\hat{\phi}(\xi).$$

简单的变量替代就推出

$$\int_{\mathbb{T}^d\times I}|e^{it\Delta}\phi|^p dx_1\cdots dx_d dt\lesssim\frac{1}{N^{d+2}}\int_{\substack{|y_1|,\cdots,|y_d|\leqslant 8N\\ y_{d+1}\in I_{N^2}}}$$
$$\Big|\sum_{\eta_1,\cdots,\eta_d}a_\eta e(y_1\eta_1+\cdots+y_d\eta_d+y_{d+1}(\eta_1^2+\cdots+\eta_d^2))\Big|^p dy_1\cdots dy_{d+1},$$

这里I_{N^2}是长度$\sim N^2|I|$的一个区间,根据被积函数关于$y_1,\cdots,y_d$的周期性,容易推出

$$右边 \lesssim \frac{1}{N^{d+2}(N|I|)^d}\int_{B_{N^2|I|}}\Big|\sum_{\eta_1,\cdots,\eta_d} a_\eta e(y_1\eta_1+\cdots+y_d\eta_d+y_{d+1}(\eta_1^2+\cdots+\eta_d^2))\Big|^p$$

$$dy_1\cdots dy_{d+1}, \qquad B_{N^2|I|}半径\sim N^2|I|球.$$

注意到$(\eta_1,\cdots,\eta_d,\eta_1^2+\cdots+\eta_d^2)$在$P^d$ 上是$\sim 1/N$分离的,则对$R\sim N^2|I|$使用定理4.18就获得有理环上Strichartz估计.

Remarks 6

- $\xi_1^2\theta_1+\cdots+\xi_d^2\theta^2$可以用任意正定二次型$Q(\xi_1,\cdots,\xi_d)$来替代.
- 当$\theta_1=\cdots=\theta_d=1$时, 对应着经典Tori的情形.
- 定理4.23结合Bourgain的经典定理(见91-GFA文章中定理113、定理114)就得

$$\|e^{it\Delta}\phi\|_{L^p(\mathbb{T}^d\times I)}\lesssim N^{\frac{d}{2}-\frac{d+2}{p}}|I|^{\frac{1}{p}}\|\phi\|_2,\quad p>\frac{2(d+2)}{d}. \tag{4.82}$$

The sketch of decoupling inequality

- **超曲面S上Decoupling定理的证明策略**(见苗长兴讲义)
  - 引入超曲面S上分离性的多线性版本,证明该形式等价于“分离性定理”, 适用范围是$2\leqslant p\leqslant \frac{2d}{d-1}$. 为弥补从$\frac{2d}{d-1}$到$\frac{2(d+1)}{d-1}$的分离性,就需要Bourgain-Guth的方法提升多线性分析,实施尺度归纳,并对每一步迭代使用多线性分离性定理.
  - 波包分解(wave packet decomposition)、rescaling技术或相应的抛物版本.
  - Wolff的尺度归纳方法与Bourgain-Guth方法(基于BCT的多线性分析技术).
- 定义decoupling-模及带权的decoupling-模如下:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^{p,R^{-1}}(\mathbb{R}^d)} \triangleq \Big(\sum\limits_{\tau:R^{-1/2}-\text{slab}} \|f_\tau\|^2_{L^p(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/2}, \\ \|f\|_{L^{p,R^{-1}}(B_R,w_{B_R}dx)} \triangleq \Big(\sum\limits_{\tau:R^{-1/2}-\text{slab}} \|f_\tau\|^2_{L^p(B_R,w_{B_R}dx)}\Big)^{1/2}, \end{cases}$$

其中权函数w_{B_R}表示集中在B_R球内,在B_R外快速衰减的函数.

- 用$\mathfrak{D}_{p,d}(R)$表示使得线性ℓ^2分离性不等式:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{L^{p,R^{-1}}(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall f\text{满足 } \operatorname{supp}\hat{f} \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1})$$

成立的最优常数. 用$\mathfrak{M}_{p,d}(R)$ 表示使得多线性ℓ^2 分离性不等式:

$$\Big\|\prod_{j=1}^{d}|f_j|^{\frac{1}{d}}\Big\|_{L^p(B_R)} \leqslant C\prod_{j=1}^{d}\|f_j\|^{\frac{1}{d}}_{L^{p,R^{-1}}(w_{B_R})}, \ \forall f_j\text{满足 } \operatorname{supp}\hat{f}_j \subset \tau_j \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1})$$

成立的最优常数,这里$\tau_1,\cdots,\tau_d$满足ω横截条件.

Lemma 4.24 (trivial decoupling)

$$\|f\|_{L^p(B_R)} \lesssim R^{d(1/2-1/p)}\|f\|_{L^{p,R^{-1}}(w_{B_R})}, \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{4.83}$$

事实上, 由Bernstein估计和局部正交性不等式, 当$p \geqslant 2, \operatorname{supp}\hat{f} \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1})$,

$$\|f\|_{L^p(B_R)} \lesssim \|f\|_{L^2(w_{B_R})} \lesssim \|f\|_{L^{2,R^{-1}}(w_{B_R})}.$$

由Hölder 不等式

$$\|f_\tau\|_{L^2(w_{B_R})} \lesssim R^{d(1/2-1/p)}\|f_\tau\|_{L^p(w_{B_R})}.$$

根据decoupling 模的定义就得到引理4.24的证明.

Step1. 分离性与多线性分离性定理的等价性

Theorem 4.25 (多线性ℓ^2分离性定理)

设$\tau_1 \cdots \tau_d \subset \mathcal{N}_{R-1}(P^{d-1})$ 满足ω-横截性条件, 则对$p \geqslant 2$, 不等式

$$\Big\| \prod_{j=1}^{d} |f_j|^{1/d} \Big\|_{L^p(B_R)} \lessapprox \omega^{-O(1)} R^{\alpha(p)} \prod_{j}^{d} \|f_j\|_{L^{p,R-1}}^{1/d} \tag{4.84}$$

成立, 其中supp $\hat{f}_j \subset \tau_j, 1 \leqslant j \leqslant d$.

$$\alpha(p) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 2 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}; \\ \frac{d-1}{4} - \frac{d+1}{2p}, & \text{if} \quad \frac{2(d+1)}{d-1} < p \end{cases} \tag{4.85}$$

Proposition 2 (迭代技术与过程)

假设$d = 2$ 或$d \geqslant 3$ 且$\mathfrak{D}_{p,d-1}(R) \lessapprox 1$,则对$p \geqslant 2$和$\forall \varepsilon > 0$, 可选取充分小的$\omega(\varepsilon) \in (0,1]$使得

$$\mathfrak{D}_{p,d}(R) \lesssim \omega^{-O(1)} R^{\varepsilon} \mathfrak{M}_{p,d}(R,\omega). \tag{4.86}$$

利用**多线性ℓ^2分离性定理4.25与引理2**就得分离性定理. 事实上,由插值定理,仅需要证明端点情形:

$$p_c(d) := \frac{2(d+1)}{d-1}.$$

注意到$p_c(d)$ 关于d是递减的,于是可以进行归纳迭代. 注意到

$$\mathfrak{D}_{p_c(2),2} \lessapprox 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathfrak{D}_{p_c(3),2} \lessapprox 1.$$

利用定理4.25和命题2就得

$$\mathfrak{D}_{p_c(3),3} \lessapprox_\omega \mathfrak{M}_{p_c(3),3} \lessapprox_\omega 1.$$

对于高维的情形,可以进行同样的归纳迭代来实现.

Step2 从上面的讨论, 仅需证明**多线性ℓ^2分离性定理与$d=2$时分离性定理**! 固定$1 \ll K \ll R$(中间尺度)以方便尺度的转换. 对满足

$$\hat{f} \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1}) \subset \bigcup_{\tau: K^{-1}\text{region}} \tau$$

的f予以分解,就有

$$f = \sum_{\tau: K^{-1}\text{region}} f_\tau.$$

为方便使用Bourgain-Guth 方法,有效发挥横截性的功能,引入如下概念.

Definition 4.26 (联系多线性版本与分离性估计的桥梁)

设$0<\lambda<1$, $x\in B_R$, 称x 关于f 是λ-broad,如果

$$\max_{\alpha:\ K^{-1}\text{region}} |f_\alpha(x)| < \lambda |f(x)|. \tag{4.87}$$

定义

$$Br_\lambda f = \begin{cases} f(x), & x \text{ is a } \lambda\text{-broad point} \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \tag{4.88}$$

所以,如果x不是f的λ-broad, 并注意到$\ell^q \hookrightarrow \ell^\infty$, 则

$$|f(x)| \leqslant \lambda^{-1}\Big(\sum_{\alpha:K^{-1}\text{region}} \|f_\alpha\|_{L^q(B_R)}\Big)^{1/q}.$$

因此,由三角不等式

$$\|f\|_{L^q(B_R)} \leqslant \|Br_\lambda f\|_{L^q(B_R)} + \lambda^{-1}\Big(\sum_{\alpha:K^{-1}\text{region}} \|f_\alpha\|_{L^q(B_R)}\Big)^{1/q}. \tag{4.89}$$

为沟通不同尺度之间的联系,需要下面的抛物框架下的伸缩引理:

Lemma 4.27 (Parabolic scaling)

如果$R^{-1} \ll \rho \leqslant 1$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 且$\mathrm{supp}\hat{g}$ 包含在$\mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1})$的$\rho^{1/2}$-邻域, 则

$$\|g\|_{L^p(B_R)} \lesssim \mathcal{D}_{p,d}(\rho R)\|g\|_{L^{p,R^{-1}}(w_{B_R})}. \tag{4.90}$$

Step3 $d = 2$**分离性定理的证明:**

Lemma 4.28

存在$c > 0$,对$0 < \lambda < c$下面结论成立:对$x \in B_R$, 存在依赖于x 的K^{-1}-regions α_1^x, α_2^x, 使得

- $\mathrm{dist}(\alpha_1^x, \alpha_2^x) \gtrsim K^{-1}$.
- $|Br_\lambda f(x)| \lesssim K^2 \min(f_{\alpha_1^x}, f_{\alpha_2^x})$. 所以,只要选取充分小的λ,就有下面点态估计:

$$|Br_\lambda f(x)| \lesssim |f_{\alpha_1^x}|^{\frac{1}{2}}|f_{\alpha_2^x}|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.91}$$

为了使(4.91)式不依赖于x, 改写(4.89)中的第一项为

$$|Br_\lambda f(x)| \lesssim K^2 \sum_{\substack{\tau_1,\tau_2 - K^{-1} reg \\ \mathrm{dist}(\tau_1,\tau_2)\gtrsim K^{-1}}} |f^x_{\tau_1}|^{1/2}|f^x_{\tau_2}|^{1/2}.$$

由parabolic rescaling引理,(4.89)就转化成

$$\|f\|_{L^p(B_R)} \leqslant K^2 \sum_{\substack{\tau_1,\tau_2 - K^{-1} reg \\ \mathrm{dist}(\tau_1,\tau_2)\gtrsim K^{-1}}} \|\prod_{j=1}^{2} |f_{\tau_j}|^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(B_R)} + \mathfrak{D}_{p,2}(R/K)\|f\|_{L^{p,R^{-1}}(w_{B_R})}.$$

由于$\mathrm{dist}(\tau_1,\tau_2) \gtrsim K^{-1}$及多线性分离估计的假设,就有

$$\Big\|\prod_{j=1}^{2} |f_{\tau_j}|^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^p(B_R)} \leqslant \mathfrak{M}_{p,2}(R,K^{-1}) \prod_{j=1}^{2} \|f_{\tau_j}\|^{1/2}_{L^{p,R^{-1}}(w_{B_R})}$$

所以

$$\|f\|_{L^p(B_R)} \lesssim (K^4\mathfrak{M}_{p,2}(R,K^{-1}) + \mathfrak{D}_{p,2}(R/K))\|f\|_{L^{p,R^{-1}}(w_{B_R})}. \tag{4.92}$$

这样就得到了迭代关系

$$\mathfrak{D}_{p,2}(R) \leqslant C\big(K^4\mathfrak{M}_{p,2}(R,K^{-1}) + \mathfrak{D}_{p,2}(R/K)\big). \tag{4.93}$$

重复上述迭代,我们得到

$$\mathfrak{D}_{p,2}(R) \leqslant K^4 \sum_{j=0}^{N} C^{j+1} \mathfrak{M}\Big(\frac{R}{K^j}, K^{-1}\Big) + C^{N+1} \mathfrak{D}_{p,2}\Big(\frac{R}{K^N}\Big). \tag{4.94}$$

如果我们选取$N \sim \log_K R$, $K \triangleq \omega^{-1}$则

$$\mathfrak{D}_{p,2} \lesssim \omega^{-4} R^{\varepsilon(\omega)} \mathfrak{M}_{p,2}(R,\omega), \qquad \varepsilon(\omega) := \log_{1/\omega} C. \tag{4.95}$$

Step 4 多线性ℓ^2分离性定理的证明: ℓ^2 分离性定理与多线性限制性定理紧密相关.

♦ 当$2 \leqslant p \leqslant \frac{2d}{d-1}$ 时,从多线性限制性定理直接推出多线性ℓ^2分离性定理. 事实上,由BCT's多线性限制性定理,

$$\Big\| \prod_{j=1}^{d} |f_j|^{1/d} \Big\|_{L^p_{\rm avg}(B_R)} \lessapprox \omega^{-O(1)} \prod_{j=1}^{d} \|f_j\|^{1/d}_{L^2_{\rm avg}(w_{B_R})}$$

所以只需要证明

$$\|f_j\|_{L^2_{\rm avg}(w_{B_R})} \lesssim \|f_j\|_{L^{p,R^{-1}}_{\rm avg}(w_{B_R})}. \tag{4.96}$$

事实上,从Hölder 不等式和局部正交性

$$\begin{cases} \|f_j\|_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})} \lesssim \|f_j\|_{L^{2,R^{-1}}_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})}, & (\text{局部正交性}) \\ \|f_{j,\tau}\|_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})} \lesssim \|f_{j,\tau}\|_{L^p_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})}, & (\text{Hölder 不等式}) \end{cases}$$

就可以直接导出得到. 由此可见**多线性限制性估计强于多线性分离性估计**!

Proposition 3 (迭代引理- 多线性限制性情形)

设$\tau_1,\cdots,\tau_n\subset\mathcal{N}_{R-1}(P^{d-1})$ 满足ω-横截条件,B_R 是半径为R的球, $\mathscr{B}$ 一组半径为$R^{1/2}$的球构成的集合, 且$\mathscr{B}$ 构成了B_R 一有限重覆盖. 则

$$\|\prod_{j=1}^{d}\|f_j\|^{1/d}_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_{R^{1/2}}})}\|_{\ell^p_{\mathrm{avg}}(\mathscr{B})} \lessapprox \omega^{-O(1)}R^{-d/2}\prod_{j=1}^{d}\|f_j\|^{1/d}_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.97}$$

上述估计仅仅在$2\leqslant p\leqslant\frac{2d}{d-1}$上成立,但对于$p>\frac{2d}{d-1}$失效.建立$p>\frac{2d}{d-1}$就需要估计(4.97)的一个变体.

对于多线性分离性定理,需要建立**多线性分离性框架下的迭代引理:**

Proposition 4 (迭代引理-多线性分离性情形)

设$\tau_1, \cdots, \tau_n \subset \mathcal{N}_{R^{-1}}(P^{d-1})$ 满足ω-横截条件,B_R 为半径为R的球,$\mathscr{B}$ 一组半径为$R^{1/2}$的球构成的集合，且$\mathscr{B}$ 构成了B_R 一有限重覆盖.当$\frac{2d}{d-1} \leqslant s$,则

$$\| \prod_{j=1}^{d} \|f_j\|^{1/d}_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_{R^{1/2}}})} \|_{\ell^s_{\mathrm{avg}}(\mathscr{B})} \lesssim \omega^{-O(1)} R^{-d^2/(d-1)s} \prod_{j=1}^{d} \|f_j\|^{(1-\beta)/d}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \prod_{j=1}^{d} \|f_j\|^{\beta/d}_{L^{s,R^{-1}}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.98}$$

设$r_0 := R^{1/2^N}$其中N是充分大的整数.从r_0 过渡到R的过程中，需要一些中间的尺度r_ℓ:

$$r_\ell = r_0^{2^\ell} = R^{1/2^{N-\ell}}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant N.$$

令$\mathscr{B}_{r_N} := \{B_R\}$. 对$0 \leqslant \ell \leqslant N-1$,令$\mathscr{B}_{r_\ell}$ 为半径为r_ℓ球构成的集合,且构成了B_R的有限重覆盖. 对于$B_{r_{\ell+1}} \in \mathscr{B}_{r_{\ell+1}}$,定义

$$\mathscr{B}_{B_{r_{\ell+1}}} := \left\{ B_{r_\ell} \in \mathscr{B}_{r_\ell} : B_{r_\ell} \cap B_{r_{\ell+1}} \neq \varnothing \right\};$$

利用命题4, 可以获得下面的估计. 从小尺度r_ℓ 过渡到大尺度$r_{\ell+1}$ 的过程中起到关键作用.

Lemma 4.29

对任意的$0 \leqslant \ell \leqslant N-1$，我们由下式估计

$$\begin{aligned}&\Big\|\prod_{j=1}^{d}\|f_j\|_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_\ell})}^{1/d}\Big\|_{\ell^s_{\mathrm{avg}}(\mathscr{B}_{r_\ell})}\\ &\lessapprox \mathfrak{D}_{s,d}(R/r_{\ell+1})^{\beta}\Big\|\prod_{j=1}^{d}\|f_j\|_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_{r_{\ell+1}}})}^{1/d}\Big\|_{\ell^s_{\mathrm{avg}}(\mathscr{B}_{r_{\ell+1}})}^{1-\beta}\prod_{j=1}^{d}\|f_j\|_{L^{s,R^{-1}}_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})}^{\beta/d}\end{aligned} \tag{4.99}$$

■ **多线性分离性定理的证明** 从平凡分离性定理推知$\mathfrak{D}_{p_c,d}(R,\omega)$ 关于R至多多项式增长,则$\mathfrak{M}_{p_c,d}(R,\omega)$ 也至多多项式增长.令

$$\mathfrak{M}_{p_c,d}(R,\omega)\approx_\omega R^\gamma, \qquad \gamma\geqslant 0. \tag{4.100}$$

下面只需证明$\gamma=0$. 固定$\frac{2d}{d-1}\leqslant s\leqslant\frac{2(d+1)}{d-1}$，实际上仅需证明

$$\mathfrak{M}_{s,d}(R,\omega)\lessapprox 1, \qquad \text{即 } \gamma=0.$$

选取$R>1$, 利用平凡的多线性分离性定理就得:

$$\Big\|\prod_{j=1}^d |f_j|^{1/d}\Big\|_{L^s_{\mathrm{avg}}(B_R)} \leqslant r_0^{d/2}\Big\|\prod_{j=1}^d \|f_j\|^{1/d}_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_{r_0}})}\Big\|_{\ell^s_{\mathrm{avg}}(\mathscr{B}_{r_0})}.$$

重复应用引理4,就得

$$\Big\|\prod_{j=1}^d |f_j|^{1/d}\Big\|_{L^s_{\mathrm{avg}}(B_R)} \lessapprox_\omega A_N(R)\Big(\prod_{j=1}^d \|f_j\|^{1/d}_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})}\Big)^{\beta_N}\Big(\prod_{j=1}^d \|f_j\|^{1/d}_{L^{s,R^{-1}}_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})}\Big)^{1-\beta_N}, \tag{4.101}$$

其中

$$\beta_\ell := (1-\beta)^\ell,\quad A_N(R) := r_0^{d/2}\Big[\prod_{j=1}^{N-1}\mathfrak{D}_{s,d}(R/r_{\ell+1})^{\beta_\ell}\Big]^\beta.$$

利用局部正交性, 就得

$$\|f_j\|_{L^2_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})} \lesssim \|f_j\|_{L^{2,R^{-1}}_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})} \leqslant \|f_j\|_{L^{s,R^{-1}}_{\mathrm{avg}}}.$$

所以

$$\Big\|\prod_{j=1}^d |f_j|^{1/d}\Big\|_{L^s_{\mathrm{avg}}(B_R)} \lessapprox_\omega A_N(R)\prod_{j=1}^d \|f_j\|^{1/d}_{L^{s,R^{-1}}_{\mathrm{avg}}(w_{B_R})}$$

这样，我们就得到了估计:

$$\mathfrak{M}_{s,d}(R,\omega) \lessapprox_\omega A_N(R).$$

对$\forall\varepsilon > 0$, 选取ω充分小,利用r_ℓ的定义就得

$$\mathfrak{M}_{s,d}(R,\omega) \lesssim_{\varepsilon,\omega} R^\varepsilon R^{d/2^{N+1}} \Big[\prod_{\ell=1}^{N} \mathfrak{M}_{s,d}(R^{1-1/2^{N-\ell}})^{\beta_{\ell-1}}\Big]^\beta.$$

由(4.100)知上式等价于

$$R^\gamma \lesssim_{\varepsilon,\omega} R^{2\varepsilon} R^{d/2^{N+1}} \Big[\prod_{\ell=1}^{N} R^{\gamma(1-1/2^{N-\ell})\beta_{\ell-1}}\Big]^\beta.$$

注意到$s \leqslant \frac{2(d+1)}{d-1}$ 意味着$\beta \leqslant 1/2$, 括号内的指标具有如下控制估计:

$$\beta\sum_{\ell=1}^{N}(1-1/2^{N-\ell})\beta_{\ell-1} = 1-\beta_N - \beta\sum_{\ell=1}^{N}\beta_{\ell-1}/2^{N-\ell} \leqslant 1-2\beta N/2^N.$$

所以

$$R^{2\beta\gamma N/2^N} \lesssim_{\varepsilon,\omega} R^{\varepsilon+d/2^{N+1}}.$$

注意到上式对$\forall\varepsilon > 0$ 和$R \gg 1$均成立,则$\gamma N \leqslant 2\beta\gamma N \leqslant d/2$. 对$\forall N \in \mathbb{N}$, 总可推出$\gamma = 0$. 这就证明多线性分离性定理.

Decoupling定理的应用(III)-球面格点对应的的离散限制型猜想

记$d \geqslant 3$, $\lambda = N^2 \geqslant 1$, 考虑离散球面

$$\mathcal{F}_{d,N^2} = \Big\{ \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_d) \in \mathbb{N}^d : \ |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_d|^2 = N^2 \Big\}. \tag{4.102}$$

Bourgian[93-IRMN]在研究Tori上Laplace算子的特征函数的L^p估计时,有如下猜想(指标与抛物面情形相匹配):

Conjecture 4.8 (Tori上Laplace算子的特征函数L^p估计)

设$d \geqslant 3$, $a_\xi \in \mathbb{C}$. 则对$\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\Big\| \sum_{\xi \in \mathcal{F}_{d,N^2}} a_\xi e(\xi \cdot x) \Big\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \lesssim_\varepsilon N^{\frac{d-2}{2} - \frac{d}{p} + \varepsilon} \|a_\xi\|_{\ell^2(\mathcal{F}_{d,N^2})}, \quad p \geqslant \tfrac{2d}{d-2}. \tag{4.103}$$

- Bourgain-Demeter[Illinois J. Math-13]验证了$p \geqslant \frac{2d}{d-3}$, $d \geqslant 4$时, (4.103) 成立. 进而, 在[IRMN-2014]中,利用数论、关联几何、Fourier方法将上述结果改进为

$$p \geqslant \tfrac{44}{7}, \ d = 4; \quad 及 \quad p \geqslant \tfrac{14}{3}, \ d = 5.$$

Theorem 4.30 (定理4.18$\Longrightarrow$Bourgian猜想4.8的改进形式)

设$d\geqslant 4$, 则对任意的$p\geqslant \frac{2(d-1)}{d-3}$, 估计(4.103)成立.

- 固定$\|a_\xi\|_2=1$, 定义$F(x)=\sum_{\xi\in\mathcal{F}_{d,N^2}} a_\xi e(\xi\cdot x)$.
- 利用Bourgain-Demeter估计[Illinois J. Math-13],可见

$$\big|\{|F|>\alpha\}\big| \lesssim_\varepsilon \alpha^{-2\frac{d-1}{d-3}} N^{\frac{2}{d-3}},\ \ d\geqslant 4,\ \ \alpha\gtrsim_\varepsilon N^{\frac{d-1}{4}+\varepsilon}. \tag{4.104}$$

利用L^∞估计及插值, 问题归结为端点$p_d=\frac{2(d-1)}{d-3}$对应的估计.

- 注意到$\|F\|_\infty\leqslant N^{C_d}$, 直接验证

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|F|^{p_d}dx=&\int_{N^{\frac{d-1}{4}+\varepsilon}\lesssim_\varepsilon \alpha\leqslant N^{C_d}}\big|\{|F|>\alpha\}d\alpha\\&+N^{(\frac{d-1}{4}+\varepsilon)(p_d-\frac{2(d+1)}{d-3})}\int_{\mathbb{R}^d}|F|^{\frac{2(d+1)}{d-3}d}dx.\end{aligned} \tag{4.105}$$

利用(4.104)估计上式第一项, 利用定理4.18估计上式第二项.

Decoupling定理的应用(IV)-堆垒能量与关联几何

分离性定理4.16的证明隐含使用了tubes与cube之间的关联性，关联几何深刻地展现多线性Kakeya 现象在分离性理论中的作用. 自然,分离性定理在关联几何中也会具有重要应用.

在指数和强振荡的L^p刻画定理4.18中，$\Lambda \subset S$是$\delta^{1/2}$分离性集. 是否在没有分离性条件的前提下,对于充分大R,获得指数和强振荡的L^p估计? 事实上，对$S = P^2$的情形,得到非常强估计(**不依赖分离尺度**)

Theorem 4.31 (指数和强振荡的L^p刻画-II)

设$\Lambda \subset S$是任意不同点集，则对于充分大的$R = R(\Lambda, |\Lambda|)$(仅依赖$\Lambda$的几何与个数)，有

$$\left(\frac{1}{B_R}\int_{B_R}\Big|\sum_{\xi\in\Lambda} a_\xi e(\xi\cdot x)\Big|^4 dx\right)^{1/4} \lesssim_\varepsilon |\Lambda|^\varepsilon \|a_\xi\|_{\ell^2(\Lambda)}, \ \forall \varepsilon > 0. \tag{4.106}$$

特别，利用周期性，结合关联几何中的基本事实，就得抛物面离散限制定理4.22中(ii)在$d = 2$的情形.

堆垒能量与关联几何的术语与重要定理

- *k*-**能量** 设整数$k \geqslant 2$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, 定义$k$-能量如下:

$$\mathbb{E}(\Lambda) \triangleq \left|\left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_{2k}) \in \Lambda^{2k} : \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_{2k}\right\}\right| \quad (4.107)$$

Theorem 4.32 (Szemerédi-Trotter关联定理)

设$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$是平面上任一直线集合, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$是平面上任一点集, 则$\mathcal{L}$与$\mathcal{P}$至多具有$O(|\mathcal{L}| + |\mathcal{P}| + (|\mathcal{L}||\mathcal{P}|)^{2/3})$ 关联. 若将直线集$\mathcal{L}$换成圆的集合$\mathcal{Q}$,则关联控制最多出现一个log型因子.

Conjecture 4.9 (单位距离猜想)

平面上N点所能确定单位线段的个数$\lesssim_\varepsilon N^{1+\varepsilon}$.

Remarks 7

分离性理论与具振荡指数和-强L^p平均刻画定理4.31在关联几何一系列猜想的研究中具有重要作用.

Decoupling定理的应用(V)-Annular集上的堆垒能量

Annular集上的堆垒能量估计非常重要,借助它就给出强振荡指数和L^p刻画定理4.18的推广形式, 这在解析数论有重要应用.

Theorem 4.33 (指数和强振荡的L^p刻画-III)

设$S\in\mathbb{R}^d$具正定二次型的C^2紧超曲面.对每一个$\tau\in\mathcal{P}_\delta$, Λ_τ表示τ中的点集,$\Lambda=\cup_\tau\Lambda_\tau$.则对满足$R\gtrsim\delta^{-1}$的球$B_R$, 及$\forall\varepsilon>0$,有如下估计:

$$\Big\|\sum_{\xi\in\Lambda}a_\xi e(\xi\cdot x)\Big\|_{L^{\frac{2(d+1)}{d-1}}(B_R)}\lesssim_\varepsilon\delta^{-\varepsilon}\Big(\sum_\tau\Big\|\sum_{\xi\in\Lambda_\tau}\|a_\xi e(x\cdot\xi)\Big\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d-1}}(w_{B_R})}\Big)^{1/2}. \quad (4.108)$$

- 若$R\sim\delta^{-1}$, 对其Fourier变换可用Λ上的Dirac测度的加权和逼近的函数应用分离性定理4.16; 若$R\gtrsim\delta^{-1}$, 利用Minkowshi不等式就得.
- 设$R>1$, $A_R=\{\xi\in\mathbb{R}^2:\ R\leqslant|\xi|\leqslant R+R^{-\frac{1}{3}}\}$. 记$A'_R=A_R\cap\mathbb{Z}^2$, 则

$$\mathbb{E}_3(A'_R)\lesssim_\varepsilon|A'_R|^{\frac{1}{3}+\varepsilon}. \quad (4.109)$$

Decoupling定理的应用(VI)-丢番图方程或不等式解的个数估计

分离性定理可以给出或改进丢番图方程或不等式解的个数估计. 考虑有界区域丢番图方程

$$\begin{cases} n_1^k + n_2^k + n_3^k = n_4^k + n_5^k + n_6^k, \quad k \geqslant 2, \\ n_1 + n_2 + n_3 = n_4 + n_5 + n_6, \quad 1 \leqslant n_j \leqslant N. \end{cases} \tag{4.110}$$

整数解的个数. 容易看出,丢番图方程(4.110)具有$6N^3$个平凡解. 问题: 给出(4.110)非平凡解个数$U_k(N)$的渐近行为, Waring问题是该问题的主要动因!

- **Segre-cubic问题:** 设$k=3$, Vaughan-Wooley[1995]证明

$$U_3(N) \sim N^2 (\log N)^5.$$

- 设$k \geqslant 4$, Greaves[1997]证明$U_k(N) \sim N^{\frac{17}{6}+\varepsilon}$.
- 分离性定理固然无法获得上述精确估计,然而可以成功地处理相应的扰动问题.

Theorem 4.34 (Bourgain-Demeter-丢番图方程解的个数估计(I), 2015)

固定$k \geqslant 2$ 及C,则丢番图不等方程

$$\begin{cases} |n_1^k + n_2^k + n_3^k - n_4^k - n_5^k - n_6^k| \leqslant CN^{k-2}, \\ n_1 + n_2 + n_3 = n_4 + n_5 + n_6, \end{cases} \tag{4.111}$$

满足$n_j \sim N$的解具有$O(N^{3+\varepsilon})$个.

- **Step 1**: 对曲线$\{(\xi, \xi^k) : |\xi| \sim 1\}$、曲线上的分离点集

$$\Lambda \triangleq \left\{ \left(\frac{n}{N}, \left(\frac{n}{N} \right)^k \right) : \ n \sim N \right\}$$

及$\delta = N^{-2}$, 应用指数和强振荡的L^p定理4.18($p = d(d+1) = 6$),就得

$$\frac{1}{N^4} \int_{|x| \leqslant N^2} \int_{|y| \leqslant N^2} \left| \sum_{n \sim N} e\left(x\frac{n}{N} + y\left(\frac{n}{N}\right)^k \right) \right|^6 dxdy \lesssim_\varepsilon N^{3+\varepsilon} \tag{4.112}$$

- **Step 2** 利用rescaling与周期性,可见

$$\begin{aligned}&N^{k-3}\int_{|x|\leqslant N}\int_{|y|\leqslant N^{2-k}}\Big|\sum_{n\sim N}e(xn+yn^k)\Big|^6 dxdy\\ =&N^{k-2}\int_{|x|\leqslant 1}\int_{|y|\leqslant N^{2-k}}\Big|\sum_{n\sim N}e(xn+yn^k)\Big|^6 dxdy\lesssim_\varepsilon N^{3+\varepsilon}\end{aligned}\tag{4.113}$$

- 令Schwartz $\phi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^+$具正Fourier变换,满足$\hat{\phi}(\xi)\geqslant 1,|\xi|\leqslant 1$. 于是,$\phi_N(y)=\phi(N^{k-2}y)$对应着球$|y|\leqslant N^{2-k}$上的光滑cut-off, 即:

$$\begin{aligned}&N^{k-2}\int_{|x|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}}\Big|\sum_{n\sim N}e(xn+yn^k)\Big|^6\phi(N^{k-2}y)dxdy\\ =&\sum_{\substack{n_j\sim N\\ n_1+n_2+n_3=n_4+n_5+n_6}}\hat{\phi}\big(N^{2-k}(n_1^k+n_2^k+n_3^k-n_4^k-n_5^k-n_6^k)\big).\end{aligned}\tag{4.114}$$

Remarks 8 (丢番图方程的分离性方法与数论方法的比较)

- 本质上,分离性方法还证明:

$$N^{k-2}\int_{|x|\leqslant 1}\int_{|y-c|\leqslant N^{2-k}}\Big|\sum_{n\sim N}e(xn+yn^k)\Big|^6 dxdy \lesssim_\varepsilon N^{3+\varepsilon},\quad \forall\, c\in\mathbb{R}. \quad (4.115)$$

当$k\geqslant 3$时,用纯数论的方法很难估计劣弧(minor arcs)上的贡献.当$k=2$时, 左边会出现形如$cN^3\log N$的因子,说明无法省略N^ε.优弧上的估计可见Bourgain的经典文章[GFA,1993].

- 应用指数和强振荡的L^p定理4.18的推广形式-定理4.33, 可将Robert-Sargos定理从$k=4$扩展到$k\geqslant 4$. 该问题研究的动因源于临界线上的Riemann-Zeta函数零点及及Weyl不等式的Heath-Brown变体等问题的研究.

Theorem 4.35 (Bourgain-Demeter-丢番图方程解的个数估计(II), 2015)

固定$k \geqslant 4$及$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 则有

$$\int_{|x|\leqslant 1}\int_0^\lambda \Big|\sum_{n\sim N} e(xn^2+yn^k)\Big|^6 dxdy \lesssim_\varepsilon \lambda N^{3+\varepsilon}+N^{4-k+\varepsilon}. \tag{4.116}$$

特别, 不等式方程组

$$\begin{cases} |n_1^k+n_2^k+n_3^k-n_4^k-n_5^k-n_6^k| \leqslant CN^{k-1}, \\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=n_4^2+n_5^2+n_6^2, \end{cases} \tag{4.117}$$

满足$n_j \sim N$的解具有$O(N^{3+\varepsilon})$个.

- **Step 1** 取$\lambda = N^{1-k}$, 就得解的个数估计. 事实上, 仅需对满足$|J| = N^{1-k}$的区间,证明:

$$\int_{|x|\leqslant 1}\int_J \Big|\sum_{n\sim N} e(xn^2+yn^k)\Big|^6 dxdy \lesssim_\varepsilon \lambda N^{4-k+\varepsilon}. \tag{4.118}$$

- **Step 2** 对曲线$\{(\xi^2, \xi^k) : |\xi| \sim 1\}$上的分离点集

$$\Lambda \triangleq \left\{ \left(\left(\frac{n}{N}\right)^2, \left(\frac{n}{N}\right)^k \right) : \ n \sim N \right\}$$

及$\delta = R^{-1} = N^{-1}$, $B_N = [MN, (M+1)N] \times N^k J$,

$$M \in \{-N, \cdots, 0, \cdots, N-1\}$$

应用指数和强振荡的L^p定理4.33, 进而对利用周期性就得

$$\Big\| \sum_{n \sim N} e\Big(x' \frac{n^2}{N^2} + y' \left(\frac{n}{N}\right)^k\Big) \Big\|_{L^6(|x'| \leqslant N^2, y' \in N^k J)}$$
$$\lesssim_\varepsilon N^\varepsilon \Big(\sum_\alpha \Big\| \sum_{n \in I_\alpha} e\Big(x' \frac{n^2}{N^2} + y' \left(\frac{n}{N}\right)^k\Big) \Big\|_{L^6(|x'| \leqslant N^2, y' \in N^k J)} \Big)^{1/2}$$

这里$I_\alpha = [n_\alpha, n_\alpha + N^{\frac{1}{2}}]$是分割整数$n \sim N$所得的长度是$N^{\frac{1}{2}}$的区间. 应用坐标变换就得:

$$\begin{aligned}&\Big\| \sum_{n\sim N} e\big(xn^2+yn^k\big)\Big\|_{L^6(|x|\leqslant 1, y\in J)}\\ \lesssim_\varepsilon & N^\varepsilon \Big(\sum_\alpha \Big\| \sum_{n\in I_\alpha} e\big(xn^2+yn^k\big)\Big\|^2_{L^6(|x|\leqslant 1, y\in J)}\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.119}$$

- **Step 3** 对任意的$y \in J$,

$$\begin{aligned}&\Big| \sum_{n\in I_\alpha} e\big(xn^2+yn^k\big)\Big|\\ =&\Big|\sum_{m=1}^{N^{1/2}} c_{m,J,n_\alpha} e\Big(m^2\Big(x+\frac{k(k-1)}{2}n_\alpha^{k-2}y\Big)+m\big(2xn_\alpha+kn_\alpha^{k-1}y\big)\Big)\Big| + O(1).\end{aligned}$$

其中$|c_{m,J,n_\alpha}|=1$. 通过坐标变换

$$\begin{cases} x' = x + \frac{k(k-1)}{2} n_\alpha^{k-2} y, \\ y = (2k-k^2)n_\alpha^{k-1} y. \end{cases}$$

容易推出

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{n\in I_\alpha} e\big(xn^2+yn^k\big)\Big\|_{L^6(|x|\leqslant 1, y\in J)}\\
\lesssim & n_\alpha^{-\frac{k-1}{6}}\Big\|\sum_{m=1}^{N^{1/2}} c_{m,J,n_\alpha} e\big(m^2x'+2x'n_\alpha m+my'\big)\Big\|_{L^6(B_C)}+O(N^{\frac{1-k}{6}})\\
= & n_\alpha^{-\frac{k-1}{6}}\Big\|\sum_{m=1+n_\alpha}^{N^{1/2}+n_\alpha} c_{m,J,n_\alpha} e\big(m^2x'+my'\big)\Big\|_{L^6(B_C)}+O(N^{\frac{1-k}{6}}),
\end{aligned}
$$

其中B_C是以$C=O(1)$为半径的球.利用在抛物面上的离散限制型定理4.22, 上式可被$O(N^{\frac{1}{4}+\frac{1-k}{6}+\varepsilon})$控制,从而(4.119)具有形如$O(N^{\frac{1}{2}+\frac{1-k}{6}+\varepsilon})$的控制估计.

■ R^d多项式曲线$\gamma(\mathbb{R})$上分离性(decoupling)定理

设曲线$\gamma \subset \mathbb{R}^d$对应的参数化:$\gamma: \ t \longmapsto (t, t^2, \cdots, t^d)$. 对于$\mathbb{R}^d$中任意球$B(x_0, r)$,权函数$w_{B_r}: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+$ 满足$\mathrm{supp}\widehat{w_{B_r}} \subset B(0, r^{-1})$及

$$I_{B_r}(x) \lesssim w_{B_r}(x) \leqslant \Big(1 + \frac{|x - x_0)|}{r}\Big)^{-10d}.$$

表示球上特征函数的光滑化.自然, $L^p(w_B) \triangleq L^p(\cdot, w_B dx)$表示$L^p(B)$的光滑版本, $\gamma(I)$表示$\gamma(\mathbb{R})$ 的截断版本. 不失一般性, 选取$I = [0, 1]$.

Theorem 4.36 (Bougain-Demeter-Guth 2015)

假设$d \geqslant 1$,将$[0, 1]$分成长度为$1/N$的N个区间I_j之并. 对每一个I_j, 定义

$$f_j(x) \triangleq \int_{\gamma(I_j)} e(x \cdot \xi) d\mu_j(\xi), \ e(\theta) \triangleq e^{2\pi i \theta}, \ \ \mu_j = \text{弧}\gamma(I_j)\text{上的测度}.$$

则f_j在$L^{d(d+1)}(w_B)$意义下具有分离性,即

$$\Big\| \sum_{j=1}^N f_j \Big\|_{L^{d(d+1)}(w_B)} \lesssim_\varepsilon N^\varepsilon \Big(\sum_{j=1}^N \|f_j\|^2_{L^{d(d+1)}(w_B)} \Big)^{1/2}, \quad \forall B = B(x_0, N^d). \tag{4.120}$$

Remarks 9

- 正交性直接给出了$d=1$情形的“分离性定理”；双线性方法仅能给出$2\leqslant p\leqslant 2d$情形下的L^p“分离性定理”.
- 定理4.36的主旨是给出远大于d的p对应的L^p“分离性定理”. 事实上，定理4.36在$d=2$的情形属于Bougain-Demeter较前的工作.
- 定理4.36中的指标$d(d+1)$(及半径N^d)可能是sharp的. 例如: 取g_j是从属于I_j的bump函数，标准的Fourier分析表明

$$f_j(x)\triangleq\int_{I_j}e(x\cdot\gamma(\xi))g_j(\xi)d\xi\sim 1/N,\quad x\in\mathcal{T}$$

其中$\mathcal{T}$是中心在原点，尺度为$N\times N^2\times\cdots\times N^d$的长方体,因此

$$\|f_j\|_{L^{d(d+1)}(w_B)}\sim N^{-1}\times(N^{d(d+1)/2})^{\frac{1}{d(d+1)}}=1/\sqrt{N}.$$

另一方面，

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(x) \sim 1,\ x \in B_{\sim 1}(0) \implies \Big\| \sum_{j=1}^{N} f_j \Big\|_{L^{d(d+1)}(w_B)} \gtrsim 1.$$

于是，该指标恰好是"分离性定理"成立的最大指标. 事实上，如果选取$p > d(d+1)$,球B的半径明显的小于N^d，则分离性定理显然失败！

- 该分离性定理直接推出解析数论中Vinogradov猜想.

Corollary 4.37 (Vinogradov猜想的分析版本)

假设$s, d, N \geqslant 1$均为整数,对于任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\int_{[0,1]^d} \Big| \sum_{j=1}^{N} e(jx_1 + j^2 x_2 + \cdots + j^d x_d^2) \Big|^{2s} dx_1 \cdots dx_d \lesssim_{\varepsilon, s, d} N^{s+\varepsilon} + N^{2s - \frac{d(d+1)}{2} + \varepsilon}. \quad (4.121)$$

Vinogradov猜想证明概要

- 利用Hölder不等式及指数求和的平凡估计，Vinogradov猜想的估计就归结于证明

$$\int_{[0,1]^d} \left| \sum_{j=1}^{N} e(jx_1 + j^2 x_2 + \cdots + j^d x_d) \right|^{d(d+1)} dx_1 \cdots dx_d \lesssim_{\varepsilon,d} N^{\frac{d(d+1)}{2}+\varepsilon}. \quad (4.122)$$

- 利用rescale技术，上式进一步归结为证明

$$\int_{[0,N]\times[0,N^2]\times\cdots\times[0,N^d]} \left| \sum_{j=1}^{N} e(x\cdot\gamma(j/N)) \right|^{d(d+1)} dx_1 \cdots dx_d \lesssim_{\varepsilon,d} N^{d(d+1)+\varepsilon}.$$

- 鉴于被积函数沿着格点$N\mathbb{Z}\times N^2\mathbb{Z}\times\cdots\times N^d\mathbb{Z}$是周期的，因此上式进一步归结为证明

$$\int_{[0,N^d]^d} \left| \sum_{j=1}^{N} e(x\cdot\gamma(j/N)) \right|^{d(d+1)} dx_1 \cdots dx_d \lesssim_{\varepsilon,d} N^{\frac{d(d+1)}{2}+d^2+\varepsilon}. \quad (4.123)$$

- 注意到$B \triangleq B(0, N^d)$及

$$f_j(x) \triangleq e(x \cdot \gamma(j/N)) \implies \|f_j\|_{L^{d(d+1)}(w_B)} \leqslant (N^{d^2})^{\frac{1}{d(d+1)}},$$

利用分离性定理4.36,容易看出

$$(4.123)左边 \lesssim \Big\| \sum_{j=1}^{N} f_j \Big\|^{d(d+1)}_{L^{d(d+1)}(w_B)} \lesssim_\varepsilon N^\varepsilon \Big(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|^2_{L^{d(d+1)}(w_B)} \Big)^{\frac{d(d+1)}{2}}$$
$$\lesssim_{\varepsilon,d} N^{\frac{d(d+1)}{2} + d^2 + \varepsilon}. \tag{4.124}$$

由此导出Vinogradov猜想.

■ Vinogradov猜想的研究历史评注

设$d, s \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, 记

$$\begin{cases} f_d(x, N) \triangleq \sum_{j=1}^{N} e(jx_1 + j^2x_2 + \cdots + j^d x_d), \\ J_{s,d}(N) \triangleq \int_{[0,1]^d} f_d(x, N)^{2s} dx_1 \cdots dx_d. \end{cases} \tag{4.125}$$

根据Plancherel公式(正交性),容易看出$J_{s,d}(N)$恰好是如下代数方程

$$j_1^i + \cdots + j_s^i = k_1^i + \cdots + k_s^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d \tag{4.126}$$

的整数解$(j_1, \cdots, j_s)$, $(k_1, \cdots, k_s) \in \{1, 2, \cdots, N\}$的个数. **Vinogradov主要猜想**就是

$$J(s,d) \lesssim N^{\varepsilon}\big(N^s + N^{2s-\frac{1}{2}d(d+1)}\big). \tag{4.127}$$

- $s = d(d+1)/2$对应着临界指标,2014年之前,仅仅证明了$d = 2, 3$的情形.
- Vinogradov(1935)证明当$s \geqslant d^2(2\log d + \log\log d + 5)$时, (4.127)成立, 且

$$J(s,d) \sim C(s,d) N^{2s-\frac{1}{2}d(d+1)}. \tag{4.128}$$

- Wooley等(2012-2014)证明(4.127),如果下面条件之一成立:
  (i) $d = 3$;
  (ii) $s \leqslant D(d) \triangleq \frac{1}{2}d(d+1) - \frac{1}{3}d + O(d^{2/3})$;
  (iii) $s \geqslant d(d-1)$.

- Wooley发展了有效同余技术(特点是依赖算术结构), 在指数求和、Waring问题、Riemann-Zeta函数猜想等问题的研究中具有重要的作用.
  Bougain-Demeter-Guth证明Vinogradov猜想的方法是“分离性”技术. 这两种技术表面上很是不同,实际上是密切相关的. 事实上,“分离性”技术可以视为“有效同余”技术的阿基米德版本(“分离性”方法的区间类似于“有效同余”方法中的同余类), “分离性”技术的优势在于容易推广到“非算术框架”.

■ Weyl sums的控制估计-Decoupling定理的应用-VIII

注意到$f_d(x, N) \triangleq \sum_{j=1}^{N} e(jx_1 + j^2x_2 + \cdots + j^d x_d)$, 经典的Weyl定理可以表述为

Theorem 4.38 (H. Weyl)

假设$(a, q) = 1$及$|x_d - \frac{a}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$,则

$$f_d(s, N) \lesssim N^{1+\varepsilon}\left(q^{-1} + N^{-1} + qN^{-d}\right)^{2^{1-d}}. \tag{4.129}$$

作为Bougain-Demeter-Guth证明的Vinogradov主要猜想的直接结果，我们有

Theorem 4.39 (Bougain-Demeter-Guth定理)

假设$d \geqslant 3$, $2 \leqslant k \leqslant d$, 且

$$(a,q)=1, \quad \left|x_k - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

则

$$f_d(s,N) \lesssim N^{1+\varepsilon}\left(q^{-1}+N^{-1}+qN^{-k}\right)^{\sigma(d)}, \quad \sigma(d)=\frac{1}{d(d+1)}. \tag{4.130}$$

■ **Lindelöf 假设的研究-Decoupling定理的应用-IX**

$$\mu(\sigma)=\inf\{\beta>0: \ |\zeta(\sigma+it)=|O(|t|^{\beta})\}. \tag{4.131}$$

关于$\mu(1/2)$的估计，有如下历史进展:

$$\mu(1/2) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2} \quad (\text{Lindelöf, 1908}) & \frac{173}{1067} \quad (\text{Kolesnik}, 1973) \\ \frac{1}{6} \quad (\text{Hardy-Littlewood}) & \frac{35}{216} \quad (\text{Kolesnik}, 1982) \\ \frac{163}{988} \quad (\text{Walfisz,1924}) & \frac{139}{858} \quad (\text{Kolesnik}, 1985) \\ \frac{17}{164} \quad (\text{Titchmarsh,1932}) & \frac{13}{56} \quad (\text{Bombieri}, \text{Lwanice}, 1986) \\ \frac{229}{1332} \quad (\text{Philips,1933}) & \frac{17}{108} \quad (\text{Huxley}, \text{Kolesnik1990}) \\ \frac{19}{116} \quad (\text{Titchmarsh,1942}) & \frac{139}{858} \quad (\text{Huxley}, 2002) \\ \frac{15}{92} \quad (\text{Min,1949}) & \frac{32}{205}, \quad (\text{Huxley}, 2005) \\ \frac{13}{84}, \quad (\text{Bourgain}, 2014), & \text{注：Min 指中国数学家闵嗣鹤} \end{cases}$$

(历史经纬参见Huxley: Area, lattice points & exponential sums, LMSM,1996)

该问题本质是可以归结为研究形如

$$\sum_{m\sim M} e\Big(TF\big(\frac{m}{M}\big)\Big), \tag{4.132}$$

的指数求和估计. 事实上, 通过近似的函数方程, $\zeta(\frac{1}{2}+iT)$的的估计, 就归结为指数和估计

$$\sum_{m\sim M} e\Big(T\log\frac{m}{M}\Big), \qquad M < T^{\frac{1}{2}}.$$

Step 1 将区间$[M/2, M]$ 剖分成尺度为N的小区间, 在这些区间上$TF(m/M)$可以被cubic多项式替代, 相应的指数和为

$$\sum_{n\leqslant N} e\Big(a_1 n + a_2 n^2 + \mu n^3\Big), \tag{4.133}$$

这里a_1, a_2, μ依赖于I和μ是一个小量.

Step 2 借助于Poisson和(Stationary phase)可转化于如下形式的指数和:

$$\sum_{h\leqslant H} e\Big(b_1 h + b_2 h^2 + +b_3 h^{3/2} + b_4 h^{1/2}\Big), \tag{4.134}$$

这里$b_1, \cdots, b_4$依赖于I.

Step 3 当I变化(所谓的“second spacing problem”)时，理解$b_1(I), b_2(I), b(I_3)$及$I_4(I)$的分布.

Step 4 利用“大筛法”(large sieve)就可以归结为平均值问题:

$$A_k(H) = \iiiint_{[0,1]^4} \Big|\sum_{h\sim H} e\Big(x_1 h + x_2 h^2 + x_3 H^{\frac{1}{2}} h^{3/2} + x_4 H^{\frac{1}{2}} h^{1/2}\Big)\Big|^{2k} dx, \tag{4.135}$$

这对应着the first spacing problem, $k = 4, 5, 6$.

Theorem (Bombieri-Lwanice, 1986) 设$\varphi''' > 0$, 则

$$\iiint_{[0,1]^3} \Big| \sum_{h\sim H} e\Big(x_1 h + x_2 h^2 + x_3 H\varphi(h/H)\Big)\Big|^8 dx \lesssim H^{4+\varepsilon}.$$

Theorem (Huxley-Kolesnik, 1991) $A_5 \lesssim H^{5+\varepsilon}$.

Problem (Huxley, 1991) 如何获得A_6好的上界估计.

Theorem (Bourgain, 2015) 基于$\mathbb{R}^4$上曲线的“分离性”,结合Huxley关于second spacing problem的工作, 就得

$$A_6 \ll H^{6+\varepsilon}, \quad \text{(optimal)}$$