球面的微分结构与配边理论

王国祯

上海数学中心

2018-04

广义 Poincaré 猜想

问题

同伦等价于球面的流形是否一定（微分）同胚与标准球面？

广义 Poincaré 猜想

问题

同伦等价于球面的流形是否一定（微分）同胚与标准球面？

	拓扑情形	微分情形

广义 Poincaré 猜想

问题

同伦等价于球面的流形是否一定（微分）同胚与标准球面？

	拓扑情形	微分情形
$n = 1, 2$	是 (闭曲面分类定理)	

广义 Poincaré 猜想

问题

同伦等价于球面的流形是否一定（微分）同胚与标准球面？

	拓扑情形	微分情形
$n = 1, 2$	是 (闭曲面分类定理)	
$n = 3$	是 (Perelman '02)	是 (Moise '52, Perelman '02)

广义 Poincaré 猜想

问题

同伦等价于球面的流形是否一定（微分）同胚与标准球面？

	拓扑情形	微分情形
$n = 1, 2$	是 (闭曲面分类定理)	
$n = 3$	是 (Perelman '02)	是 (Moise '52, Perelman '02)
$n = 4$	是 (Freedman '82)	未解决

广义 Poincaré 猜想

问题

同伦等价于球面的流形是否一定（微分）同胚与标准球面？

	拓扑情形	微分情形
$n = 1, 2$	是 (闭曲面分类定理)	
$n = 3$	是 (Perelman '02)	是 (Moise '52, Perelman '02)
$n = 4$	是 (Freedman '82)	未解决
$n = 5, 6$	是 (Smale '60)	是 (Kervaire-Milnor '63)
$n = 7$		否 (Milnor '56)
$n \geq 8$		取决于稳定同伦群 (Kervaire-Milnor '63)

7 维 Milnor 怪球

7 维 Milnor 怪球

考虑空间

$$X_{a,b} = D^4 \times S^3 \cup_{S^3 \times S^3} D^4 \times S^3$$

粘贴映射为

$$(x, y) \mapsto x^a y x^b$$

(四元数乘法).

7 维 Milnor 怪球

考虑空间

$$X_{a,b} = D^4 \times S^3 \cup_{S^3 \times S^3} D^4 \times S^3$$

粘贴映射为

$$(x, y) \mapsto x^a y x^b$$

(四元数乘法).

7 维 Milnor 怪球

考虑空间

$$X_{a,b} = D^4 \times S^3 \cup_{S^3 \times S^3} D^4 \times S^3$$

粘贴映射为

$$(x, y) \mapsto x^a y x^b$$

(四元数乘法).$X_{a,b}$ 是 S^4 上的 S^3 丛.

7 维 Milnor 怪球

考虑空间

$$X_{a,b} = D^4 \times S^3 \cup_{S^3 \times S^3} D^4 \times S^3$$

粘贴映射为

$$(x, y) \mapsto x^a y x^b$$

(四元数乘法).$X_{a,b}$ 是 S^4 上的 S^3 丛.

(Milnor)

7 维 Milnor 怪球

考虑空间

$$X_{a,b} = D^4 \times S^3 \cup_{S^3 \times S^3} D^4 \times S^3$$

粘贴映射为

$$(x, y) \mapsto x^a y x^b$$

(四元数乘法).$X_{a,b}$ 是 S^4 上的 S^3 丛.

(Milnor)

- 当 $a + b = \pm 1$ 时, $X_{a,b}$ 与 S^7 拓扑同胚.

7 维 Milnor 怪球

考虑空间

$$X_{a,b} = D^4 \times S^3 \cup_{S^3 \times S^3} D^4 \times S^3$$

粘贴映射为

$$(x, y) \mapsto x^a y x^b$$

(四元数乘法).$X_{a,b}$ 是 S^4 上的 S^3 丛.

(Milnor)

- 当 $a + b = \pm 1$ 时，$X_{a,b}$ 与 S^7 拓扑同胚.
- 当 $a - b \neq \pm 1 \mod 7$ 时，$X_{a,b}$ 与标准球面 S^7 不是微分同胚

Brieskorn 球面

Brieskorn 球面

考虑 $\mathbb{C}^5$ 的子流形 M_k

Brieskorn 球面

考虑 $\mathbb{C}^5$ 的子流形 M_k

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^3 + e^{6k-1} = 0 \\ \end{cases}$$

Brieskorn 球面

考虑 $\mathbb{C}^5$ 的子流形 M_k

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^3 + e^{6k-1} & = & 0 \\ |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + |e|^2 & = & \epsilon \end{cases}$$

其中 $\epsilon \ll 0$ 为常数.

Brieskorn 球面

考虑 $\mathbb{C}^5$ 的子流形 M_k

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^3+e^{6k-1} = & 0 \\ |a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+|e|^2 = & \epsilon \end{cases}$$

其中 $\epsilon \ll 0$ 为常数.

(Brieskorn)

当 k 取遍 $1,2,\ldots,27$ 时, M_k 构成 7 维的所有怪球.

8 维怪球

8 维怪球

考虑

$$SU(3) = \{3 \times 3\text{复矩阵}X \mid X\bar{X}^t = I, det(X) = 1\}$$

8 维怪球

考虑

$$SU(3) = \{3 \times 3\text{复矩阵}X \,|\, X\bar{X}^t = I, det(X) = 1\}$$

令

$$N_8 = (SU(3) \setminus S^3 \times D^5) \cup_{S^3 \times S^4} D^4 \times S^4$$

8 维怪球

考虑

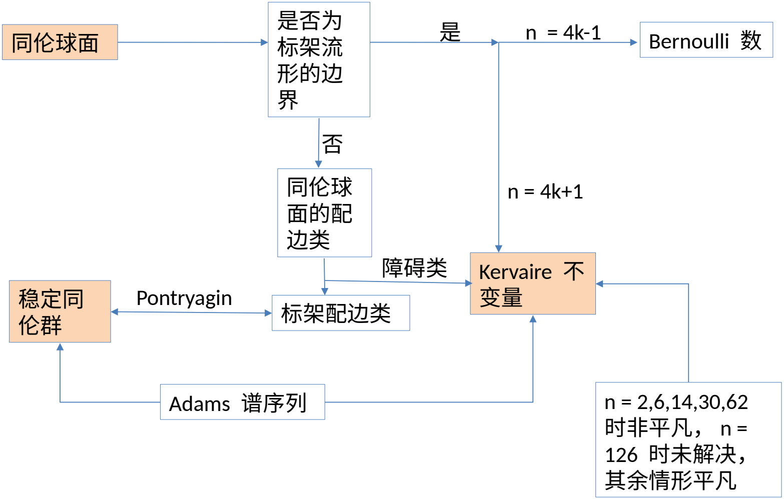
$$SU(3) = \{3 \times 3\text{复矩阵}X \mid X\bar{X}^t = I, det(X) = 1\}$$

令

$$N_8 = (SU(3) \setminus S^3 \times D^5) \cup_{S^3 \times S^4} D^4 \times S^4$$

适当选取 S^3 的嵌入以及 $D^4 \times S^4$ 的粘贴方式，可令 N_8 构成唯一的 8 维怪球.

球面上微分结构的分类


同伦球面
是否为标架流形的边界
是
n = 4k-1
Bernoulli 数
否
n = 4k+1
同伦球面的配边类
障碍类
Kervaire 不变量
稳定同伦群
Pontryagin
标架配边类
Adams 谱序列
n = 2,6,14,30,62 时非平凡， n = 126 时未解决，其余情形平凡

标架配边

标架配边

标架流形

一个稳定法丛平凡的流形（及其平凡化）称为一个标架流形.

标架配边

标架流形

一个稳定法丛平凡的流形 (及其平凡化) 称为一个标架流形.

标架配边

一个带边标架流形的边界 (及其诱导的稳定法丛平凡化) 称为标架配边意义下零配边的.

标架配边

标架流形

一个稳定法丛平凡的流形 (及其平凡化) 称为一个标架流形.

标架配边

一个带边标架流形的边界 (及其诱导的稳定法丛平凡化) 称为标架配边意义下零配边的.

(Pontryagin)

n 维标架配边群同构于球面的第 n 个稳定同伦群.

手术理论

手术理论

给定 m 维流形 M_1 与 M_2 之间的一个配边 N.

手术理论

给定 m 维流形 M_1 与 M_2 之间的一个配边 N.
存在 N 上的 Morse 函数 f, 使得 $f|_{M_1} \equiv 1$, $f|M_2 \equiv 2$. (假设 f 在各临界点处取值不同).

手术理论

给定 m 维流形 M_1 与 M_2 之间的一个配边 N.
存在 N 上的 Morse 函数 f, 使得 $f|_{M_1} \equiv 1$, $f|M_2 \equiv 2$. (假设 f 在各临界点处取值不同).

考虑 f 的一个临界值 c.

手术理论

给定 m 维流形 M_1 与 M_2 之间的一个配边 N.
存在 N 上的 Morse 函数 f, 使得 $f|_{M_1} \equiv 1$, $f|M_2 \equiv 2$. (假设 f 在各临界点处取值不同).

考虑 f 的一个临界值 c. 则 $f^{-1}(c+\epsilon)$ 同胚于

$$(f^{-1}(c-\epsilon) \setminus D^{m-k+1} \times S^{k-1}) \cup_{S^{m-k} \times S^{k-1}} S^{m-k} \times D^k$$

手术理论

给定 m 维流形 M_1 与 M_2 之间的一个配边 N.
存在 N 上的 Morse 函数 f, 使得 $f|_{M_1} \equiv 1$, $f|M_2 \equiv 2$. (假设 f 在各临界点处取值不同).

考虑 f 的一个临界值 c. 则 $f^{-1}(c+\epsilon)$ 同胚于

$$(f^{-1}(c-\epsilon) \setminus D^{m-k+1} \times S^{k-1}) \cup_{S^{m-k} \times S^{k-1}} S^{m-k} \times D^k$$

上述操作称为一次手术

手术理论

给定 m 维流形 M_1 与 M_2 之间的一个配边 N.
存在 N 上的 Morse 函数 f, 使得 $f|_{M_1} \equiv 1$, $f|M_2 \equiv 2$. (假设 f 在各临界点处取值不同).

考虑 f 的一个临界值 c. 则 $f^{-1}(c+\epsilon)$ 同胚于

$$(f^{-1}(c-\epsilon) \setminus D^{m-k+1} \times S^{k-1}) \cup_{S^{m-k} \times S^{k-1}} S^{m-k} \times D^k$$

上述操作称为一次手术

同伦球面的分类

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功，则 M 是可缩流形的边界，

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功，则 M 是可缩流形的边界，由 h-配边定理推出为标准球面 $(k \geq 5)$
- 障碍类为 signature (4k-1 维) 或 Arf-Kervaire 不变量 (4k+1 维)

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功，则 M 是可缩流形的边界,由 h-配边定理推出为标准球面 $(k \geq 5)$
- 障碍类为 signature (4k-1 维) 或 Arf-Kervaire 不变量 (4k+1 维)

同伦球面的标架配边分类

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功，则 M 是可缩流形的边界，由 h-配边定理推出为标准球面 ($k \geq 5$)
- 障碍类为 signature (4k-1 维) 或 Arf-Kervaire 不变量 (4k+1 维)

同伦球面的标架配边分类

- 任取 m 维标架闭流形 M

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功，则 M 是可缩流形的边界,由 h-配边定理推出为标准球面 $(k \geq 5)$
- 障碍类为 signature (4k-1 维) 或 Arf-Kervaire 不变量 (4k+1 维)

同伦球面的标架配边分类

- 任取 m 维标架闭流形 M
- 尝试通过手术消去 M 的 k 维同伦群，$k < m$

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功, 则 M 是可缩流形的边界,由 h-配边定理推出为标准球面 $(k \geq 5)$
- 障碍类为 signature (4k-1 维) 或 Arf-Kervaire 不变量 (4k+1 维)

同伦球面的标架配边分类

- 任取 m 维标架闭流形 M
- 尝试通过手术消去 M 的 k 维同伦群, $k < m$
- 若成功, 则 M 的标架配边类中存在同伦球

同伦球面的分类

同伦球面 M 是标架流形 N 的边界

- 尝试通过手术消去 N 的同伦群
- 若成功, 则 M 是可缩流形的边界,由 h-配边定理推出为标准球面 $(k \geq 5)$
- 障碍类为 signature (4k-1 维) 或 Arf-Kervaire 不变量 (4k+1 维)

同伦球面的标架配边分类

- 任取 m 维标架闭流形 M
- 尝试通过手术消去 M 的 k 维同伦群, $k < m$
- 若成功, 则 M 的标架配边类中存在同伦球
- 障碍类为 Arf-Kervaire 不变量 (4k+2 维)

同伦球面的分类

令 $n \geq 5$.

同伦球面的分类

令 $n \geq 5$.

定义

Θ_n 为 n 维光滑同伦球面等价类构成的 Abel 群.

Θ_n^{bp} 为可以作为稳定法丛平凡流形的边界的同伦球面构成的子群.

同伦球面的分类

令 $n \geq 5$.

定义

Θ_n 为 n 维光滑同伦球面等价类构成的 Abel 群.

Θ_n^{bp} 为可以作为稳定法丛平凡流形的边界的同伦球面构成的子群.

(Kervaire-Milnor)

令 $n \geq 5$, Θ_n^{bp} 是有限循环群, 阶数如下:

同伦球面的分类

令 $n \geq 5$.

定义

Θ_n 为 n 维光滑同伦球面等价类构成的 Abel 群.

Θ_n^{bp} 为可以作为稳定法丛平凡流形的边界的同伦球面构成的子群.

(Kervaire-Milnor)

令 $n \geq 5$, Θ_n^{bp} 是有限循环群, 阶数如下:

$$|\Theta_n^{bp}| = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \text{ 为偶数}, \\ & \\ & \end{cases}$$

同伦球面的分类

令 $n \geq 5$.

定义

Θ_n 为 n 维光滑同伦球面等价类构成的 Abel 群.

Θ_n^{bp} 为可以作为稳定法丛平凡流形的边界的同伦球面构成的子群.

(Kervaire-Milnor)

令 $n \geq 5$, Θ_n^{bp} 是有限循环群, 阶数如下:

$$|\Theta_n^{bp}| = \begin{cases} 1, & \text{若} \quad n \quad \text{为偶数}, \\ 1 \ \text{或} \ 2, & \text{若} \quad n \equiv 1 \ (mod\ 4), \end{cases}$$

同伦球面的分类

令 $n \geq 5$.

定义

Θ_n 为 n 维光滑同伦球面等价类构成的 Abel 群.

Θ_n^{bp} 为可以作为稳定法丛平凡流形的边界的同伦球面构成的子群.

(Kervaire-Milnor)

令 $n \geq 5$, Θ_n^{bp} 是有限循环群, 阶数如下:

$$|\Theta_n^{bp}| = \begin{cases} 1, & \text{若} \quad n \quad \text{为偶数}, \\ 1 \ \text{或} \ 2, & \text{若} \quad n \equiv 1 \ (mod\ 4), \\ b_k, & \text{若} \quad n = 4k-1. \end{cases}$$

b_k 等于 $2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)$ 乘以 $\frac{4B_{2k}}{k}$ 的分子, 其中 B_{2k} 为 Bernoulli 数.

同伦球面的分类

同伦球面的分类

(Kervaire-Milnor)

1. 若 $n \neq 2(mod 4)$, 存在正合列

$$0 \to \Theta_n^{bp} \to \Theta_n \to \pi_n^s/J \to 0$$

同伦球面的分类

(Kervaire-Milnor)

1. 若 $n \not\equiv 2(mod 4)$, 存在正合列

$$0 \to \Theta_n^{bp} \to \Theta_n \to \pi_n^s/J \to 0$$

2. 若 $n \equiv 2(mod 4)$, 存在正合列

$$0 \to \Theta_n^{bp} \to \Theta_n \to \pi_n^s/J \xrightarrow{\Phi_n} \mathbb{Z}/2 \to \Theta_{n-1}^{bp} \to 0$$

球面微分结构的唯一性

球面微分结构的唯一性

(王-徐)

S^{61} 具有唯一的微分结构.

球面微分结构的唯一性

(王-徐)

S^{61} 具有唯一的微分结构.

结合 Browder, Hill, Hopkins and Ravenel 等人关于 Kervaire invariant 的工作, 我们得到奇数维光滑情形的广义 Poincaré 猜想的解答:

推论

若 n 为奇数, 当且仅当 $n = 1, 3, 5, 61$ 时 S^n 具有唯一的微分结构.

球面微分结构的唯一性

(王-徐)

S^{61} 具有唯一的微分结构.

结合 Browder, Hill, Hopkins and Ravenel 等人关于 Kervaire invariant 的工作, 我们得到奇数维光滑情形的广义 Poincaré 猜想的解答:

推论

若 n 为奇数, 当且仅当 $n = 1, 3, 5, 61$ 时 S^n 具有唯一的微分结构.

一般的, 目前我们知道如下结论:

(Moise, Kervaire-Milnor, Toda, Isaksen, Wang-Xu, Behrens-Hill-Hopkins-Mahowald)

S^1, S^2, S^3, S^5, S^6, S^{12}, S^{56}, S^{61} 上的微分结构唯一.

球面微分结构的唯一性

(王-徐)

S^{61} 具有唯一的微分结构.

结合 Browder, Hill, Hopkins and Ravenel 等人关于 Kervaire invariant 的工作, 我们得到奇数维光滑情形的广义 Poincaré 猜想的解答:

推论

若 n 为奇数, 当且仅当 $n = 1, 3, 5, 61$ 时 S^n 具有唯一的微分结构.

一般的, 目前我们知道如下结论:

(Moise, Kervaire-Milnor, Toda, Isaksen, Wang-Xu, Behrens-Hill-Hopkins-Mahowald)

S^1, S^2, S^3, S^5, S^6, S^{12}, S^{56}, S^{61} 上的微分结构唯一.

除了 $n = 4$, 当 $n < 140$ 时, 其他维数的球面上存在非平凡的微分结构.

球面微分结构的分类

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Θ_n	0	0	?	0	0	b_2	2	2^3	6	b_3
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Θ_n	0	3	2	$b_4 \cdot 2$	2	2^4	$2 \cdot 8$	$b_5 \cdot 2$	24	2^3
n	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Θ_n	2^2	$b_6 \cdot 2 \cdot 24$	2	2^2	$2 \cdot 6$	b_7	2	3	3	$b_8 \cdot 2^2$
n	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
Θ_n	2^3	2^5	$2^3 \cdot 4$	$b_9 \cdot 2^2$	6	$2^2 \cdot 6$	$2 \cdot 60$	$b_{10} \cdot 2^4 \cdot 6$	$2^4 \cdot 12$	2^5
n	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Θ_n	$2^2 \cdot 24$	b_{11}	8	$2^4 \cdot 720$	$2^3 \cdot 6$	$b_{12} \cdot 2^3 \cdot 12$	$2^3 \cdot 4$	$2 \cdot 6$	$2^2 \cdot 6$	$b_{13} \cdot 2 \cdot 8$
n	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
Θ_n	$2^2 \cdot 6$	2^5	$2 \cdot 4$	$b_{14} \cdot 3$	0	2^3	2^2	$b_{15} \cdot 2^2$	4	0

k	2	3	4	5	6	7	8
b_k	28	992	8128	261632	1.45×10^9	6.71×10^7	1.94×10^{12}
k	9	10	11	12	13	14	15
b_k	7.54×10^{14}	2.4×10^{16}	3.4×10^{17}	8.3×10^{21}	7.4×10^{20}	3.1×10^{25}	5.0×10^{29}

稳定同伦群

稳定同伦群

(Freudenthal 1937)

若 X 是 n 连通空间，则当 $k \leq 2n$ 时，存在同构

$$\Sigma : \pi_k(X) \to \pi_{k+1}(\Sigma X)$$

稳定同伦群

(Freudenthal 1937)

若 X 是 n 连通空间，则当 $k \leq 2n$ 时，存在同构

$$\Sigma : \pi_k(X) \to \pi_{k+1}(\Sigma X)$$

定义

空间 X 的稳定同伦群 $\pi_k^s(X)$ 定义为

$$\varinjlim \pi_{n+k}(\Sigma^n X)$$

Pontryagin 构造

Pontryagin 构造

给定 $f\colon S^{n+k} \to S^n$. 取 S^n 中的一般点 x. 则 $f^{-1}(x)$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 k 维子流形. 进一步, $f^{-1}(x)$ 的法丛平凡.

Pontryagin 构造

给定 $f\colon S^{n+k} \to S^n$. 取 S^n 中的一般点 x. 则 $f^{-1}(x)$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 k 维子流形. 进一步, $f^{-1}(x)$ 的法丛平凡.

若 M 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 k 维子流形, 并且法丛 N_X 上存在平凡化. 则可以构造映射

$$S^{n+k} \to TN_X \to S^n$$

Pontryagin 构造

给定 $f\colon S^{n+k} \to S^n$. 取 S^n 中的一般点 x. 则 $f^{-1}(x)$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 k 维子流形. 进一步, $f^{-1}(x)$ 的法丛平凡.

若 M 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 k 维子流形, 并且法丛 N_X 上存在平凡化. 则可以构造映射

$$S^{n+k} \to TN_X \to S^n$$

(Pontryagin)

$\pi_{n+k}(S^n)$ 同构于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 k 维法丛平凡子流形的标架配边群.

$\pi_k^s(S^0)$ 同构于 k 维稳定法丛平凡流形的标架配边群.

球面的低维同伦群

球面的低维同伦群

$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}, \ n \geq 1$

零维流形的点的个数 (记重数).

球面的低维同伦群

$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z},\ n \geq 1$

零维流形的点的个数 (记重数).

$\pi_3(S^2) \cong \pi_1 SO(2) \cong \mathbb{Z},\ \pi_{n+1}(S^n) \cong \pi_1 SO(n) \cong \mathbb{Z}/2,\ n \geq 3$

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中圆周的法丛上的标架.

球面的低维同伦群

$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z},\ n \geq 1$

零维流形的点的个数 (记重数).

$\pi_3(S^2) \cong \pi_1 SO(2) \cong \mathbb{Z},\ \pi_{n+1}(S^n) \cong \pi_1 SO(n) \cong \mathbb{Z}/2,\ n \geq 3$

$\mathbb{R}^{n+1}$ 中圆周的法丛上的标架.

$\pi_{n+2}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2,\ n \geq 2$

二维曲面上 Spin 结构的 Arf 不变量.

$\pi_3^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/24$

$\pi_3^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/24$

生成元

$$\mathbb{H}^2 \supset S^7 \to S^7/S^3 \to S^4$$

对应 $S^3 = SU(2)$ 及上面的左不变标架场.

$\pi_3^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/24$

生成元

$$\mathbb{H}^2 \supset S^7 \to S^7/S^3 \to S^4$$

对应 $S^3 = SU(2)$ 及上面的左不变标架场.

生成关系

令带边流形 M 为复 K3 曲面去掉实心球. 则 M 上存在切丛的平凡化, 并且限制在边界上等价于上述生成元的 24 倍对应的标架.

J-同态

J-同态

标准球面 S^k 上稳定法丛的标架由 $\pi_k(SO)$ 分类. 其中 $SO = \varinjlim SO(n)$. 因此诱导了态射

$$J_k : \pi_k(SO) \to \pi_k^s(S^0)$$

J-同态

标准球面 S^k 上稳定法丛的标架由 $\pi_k(SO)$ 分类. 其中 $SO = \varinjlim SO(n)$.
因此诱导了态射

$$J_k : \pi_k(SO) \to \pi_k^s(S^0)$$

(Adams, Quillen)

当 $k > 0$ 时, J-态射的像是 $\pi_k^s(S^0)$ 的直和因子.

J-同态

标准球面 S^k 上稳定法丛的标架由 $\pi_k(SO)$ 分类. 其中 $SO = \varinjlim SO(n)$.
因此诱导了态射

$$J_k : \pi_k(SO) \to \pi_k^s(S^0)$$

(Adams, Quillen)

当 $k > 0$ 时, J-态射的像是 $\pi_k^s(S^0)$ 的直和因子.

$$|Im(J_k)| =$$

J-同态

标准球面 S^k 上稳定法丛的标架由 $\pi_k(SO)$ 分类. 其中 $SO = \varinjlim SO(n)$.
因此诱导了态射

$$J_k : \pi_k(SO) \to \pi_k^s(S^0)$$

(Adams, Quillen)

当 $k > 0$ 时, J-态射的像是 $\pi_k^s(S^0)$ 的直和因子.

$$|Im(J_k)| = \begin{cases} 2 & \text{若} k \equiv 0, 1 \mod 8 \\ & \end{cases}$$

J-同态

标准球面 S^k 上稳定法丛的标架由 $\pi_k(SO)$ 分类. 其中 $SO = \varinjlim SO(n)$.
因此诱导了态射

$$J_k : \pi_k(SO) \to \pi_k^s(S^0)$$

(Adams, Quillen)

当 $k > 0$ 时, J-态射的像是 $\pi_k^s(S^0)$ 的直和因子.

$$|Im(J_k)| = \begin{cases} 2 & \text{若} k \equiv 0, 1 \mod 8 \\ B_{2n}/4n\text{的分母} & \text{若} k = 4n - 1 \end{cases}$$

J-同态

标准球面 S^k 上稳定法丛的标架由 $\pi_k(SO)$ 分类. 其中 $SO = \varinjlim SO(n)$.
因此诱导了态射

$$J_k : \pi_k(SO) \to \pi_k^s(S^0)$$

(Adams, Quillen)

当 $k > 0$ 时, J-态射的像是 $\pi_k^s(S^0)$ 的直和因子.

$$|Im(J_k)| = \begin{cases} 2 & \text{若} k \equiv 0, 1 \mod 8 \\ B_{2n}/4n\text{的分母} & \text{若} k = 4n-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

同伦球面的分类

同伦球面的分类

(Kervaire-Milnor)

1. 若 $n \not\equiv 2(mod4)$, 存在正合列

$$0 \to \Theta_n^{bp} \to \Theta_n \to \pi_n^s/J \to 0$$

2. 若 $n \equiv 2(mod4)$, 存在正合列

$$0 \to \Theta_n^{bp} \to \Theta_n \to \pi_n^s/J \xrightarrow{\Phi_n} \mathbb{Z}/2 \to \Theta_{n-1}^{bp} \to 0$$

标架配边的生成元

标架配边的生成元

$\pi_4^s(S^0) = 0, \pi_5^s(S^0) = 0$

标架配边的生成元

$\pi_4^s(S^0) = 0, \pi_5^s(S^0) = 0$

$\pi_7^s \cong \mathbb{Z}/240$

生成元 σ 来自 J-同态.

标架配边的生成元

$\pi_4^s(S^0) = 0, \pi_5^s(S^0) = 0$

$\pi_7^s \cong \mathbb{Z}/240$

生成元 σ 来自 J-同态.

$\pi_8^s \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元来自 J-同态.

另一个为 $SU(3)$.

标架配边 2-部分的生成元

标架配边 2-部分的生成元

$\pi_9^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元来自 J-同态.

第二个为 $SU(3) \times S^1$.

第三个为 $\mu_9 =< \eta, 2, \sigma >$

标架配边 2-部分的生成元

$\pi_9^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元来自 J-同态.

第二个为 $SU(3) \times S^1$.

第三个为 $\mu_9 =< \eta, 2, \sigma >$

$\pi_{10}^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2$

生成元 $\eta\mu_9$.

标架配边 2-部分的生成元

$\pi_9^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元来自 J-同态.

第二个为 $SU(3) \times S^1$.

第三个为 $\mu_9 =< \eta, 2, \sigma >$

$\pi_{10}^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2$

生成元 $\eta\mu_9$.

$\pi_{11}^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/8$

由 J-同态生成.

标架配边 2-部分的生成元

标架配边 2-部分的生成元

$\pi_{12}^{s}(S^0)_{(2)} = 0$, $\pi_{13}^{s}(S^0)_{(2)} = 0$

标架配边 2-部分的生成元

$\pi_{12}^s(S^0)_{(2)} = 0$, $\pi_{13}^s(S^0)_{(2)} = 0$

$\pi_{14}^s(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元为 $S^7 \times S^7$.

另一个为 Lie 群 G_2.

(R. M. W. Wood, Framing the exceptional Lie group G_2, Topology, Vol. 15, 1976)

标架配边 2-部分的生成元

$\pi^s_{12}(S^0)_{(2)} = 0$, $\pi^s_{13}(S^0)_{(2)} = 0$

$\pi^s_{14}(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元为 $S^7 \times S^7$.

另一个为 Lie 群 G_2.

(R. M. W. Wood, Framing the exceptional Lie group G_2, Topology, Vol. 15, 1976)

$\pi^s_{15}(S^0)_{(2)} = \mathbb{Z}/32 \oplus \mathbb{Z}/2$

一个生成元来自 J-同态.

另一个为 $G_2 \times S^1$.

谢谢大家!