



四川大学数学学院
2018年4月19日·成都

数学机械化在信息科学中的应用

——控制理论的机械化

——Mechanization for Control Theory

郁文生

北京邮电大学
电子工程学院

(中国科学院自动化研究所
华东师范大学)

wsyu@bupt.edu.cn



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 1 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭


退出



控制理论的机械化


 引言

 数学机械化的研究与进展

 数学机械化方法在控制理论中的若干应用

 控制理论的机械化

 两个open不等式问题

 结束语

 致 谢

 参考文献

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

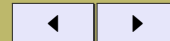
结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 2 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 3 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1 引言

● 体力劳动的机械化

- ★ 十七世纪以来，工业革命使人们逐渐实现了体力劳动的机械化，促进了社会生产力的发展。

● 脑力劳动的机械化

- ★ 上世纪电子计算机的产生，为人类实现脑力劳动的机械化创造了物质条件。
- ★ 我国在由吴文俊院士开创的数学机械化领域的研究在国际上是领先的。

● 科学技术现代化离不开脑力劳动的机械化

- ★ 吴文俊院士的“数学机械化纲领”

● 控制理论的机械化。

- ★ 应用数学机械化方法解决相关高科技领域的关键基础理论问题也是吴文俊院士“数学机械化纲领”的重要组成部分。



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

2 数学机械化的研究与进展

- 数学发展的两种思想
- 几何定理的机器证明
- 数学机械化的若干进展
- 半代数系统的求解

访问主页

标题页



第 4 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

2.1. 数学发展的两种思想

- 一种是公理化思想。
- 一种是机械化思想。
- 公理化思想起源于希腊，机械化思想贯穿整个中国古代数学。这两种思想对数学的发展都曾起过巨大作用。
- 从汉初完成的《九章算术》中对开平方、开立方的机械化过程描述，到宋元时代发展起来的求解高次代数方程组的机械化方法，都与数学机械化思想有关。
- 公理化思想在现代数学，尤其是纯粹数学中占据着统治地位。然而，其在数学上的多次重大跃进都与机械化思想有关

访问主页

标题页



第 5 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

2.2. 几何定理的机器证明

- Euclid的《几何原本》。逻辑论证、证明、公理化。
- 1637年, Descartes《几何学》。坐标、计算证明几何定理。
- 1899年, Hilbert《几何基础》。算法、分类成批证明几何定理。
- Tarski机械化定理(1950)。通常的Euclid几何是可以机械化的。
- 吴文俊(1977)初等几何判定问题与机械化证明。

访问主页

标题页



第 6 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展
数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

2.3. 数学机械化的若干进展

- 数学机械化。王浩《向机械化数学前进》，计算与证明（易与难、繁与简、刻板与灵活、枯燥与美妙）。
- Descartes的锦囊妙计。一切问题可以化为数学问题，一切数学问题可以化为代数问题，一切代数问题可以化为方程求解问题。
- 从证明的机械化到机器证明。
- 吴-Ritt零点分解定理、吴方法。Grobner基，结式消元法、数值并行法等。
- 定理机器证明的例证法（洪加威，1986）。
- 定理机器证明的消点思想，面积法、向量法、全角法、搜索法等（张景中，周咸青，高小山，1992）。

访问主页

标题页



第 7 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- 从机器判定到可读证明的自动生成。
- 机器验证、机器判定、自动生成、自动证明、定理自动发现。
- 机器证明与人工证明的媲美阶段。
- 可读性证明与明证（Certificate）。
- 平面几何、立体几何。微分几何。非欧几何。有序几何。无序几何。代数几何。
- 几何定理机器证明的传统化，几何作图问题的机器求解、几何不等式的机器证明和自动生成，微分几何的机器证明。

访问主页

标题页



第 8 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



- 等式型与不等式型定理的机器证明。
- 多项式的完全判别系统（杨路等，1996）。（复数推广，张景中，1999）。
- Collins的柱形代数分解方法。（Collins 1975; Arnon, Collins, Mccallum, 1984; Brown, 2001; Collins, Hong, 1991）。
- 不等式证明中的降维方法（杨路，1998）。破根号法。
- 不等式证明中的差分代换方法。终止性与收敛性证明（姚勇，2008）。
- 不等式自动证明与自动发现（杨路，夏壁灿，2008）。Discoverer与Bottema（杨路，夏壁灿，2000; 杨路，1998, 1999; 杨路，夏时洪，2003）。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 9 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- 数学归纳法的机械化 (Kauers 2004; Gerhold, Kauers, 2005, 2006; 杨路, 2005; 杨路, 郁文生, 2011)。
- Tarski与非Tarski模型 (Timofte, 2005, 2005; 杨路, 姚勇, 冯勇, 2007; 杨路, 郁文生, 袁如意, 2010)。
- 采用近似计算获得准确值 (张景中, 2007; Kaltofen, Li, Yang, Zhi, 2010)。
- 量词消去。实根分离与分类。半代数系统 (杨路, 夏壁灿, 2000)。
- 全局优化问题的探讨 (吴文俊, 1994; 杨路, 1999)。

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 10 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



- 例证法，传统的和可读的证明，Clifford代数技术。
- 参数化与曲线同构。
- 一般代数系统，实判别式系统，不变量与协变量理论。
- 解多项式方程组的特征值方法，带有量词的线性系统
- 平面微分系统，极限环，稳定性。
- 微分系统，偏微分方程，混沌现象。
- 统计力学中的杨-Baxter方程。
- 编码与密码理论。
- Stewart平台问题，弹性系统，电工系统，spline系统
- 控制论，极点分配问题。
- 计算机视觉，数据压缩，模式识别，小波理论
- 一阶逻辑的余式方法，多值逻辑，广义归纳法，证明检验，probable inference, infinite logic。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 11 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



2.4. 半代数系统的求解

★ 基本定义：

所谓半代数系统 (semi-algebraic systems) ，就是指多项式方程组与多项式不等式组构成的系统，形如

$$\begin{cases} p_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0, \dots, p_r(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0 \\ g_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \geq 0, \dots, g_k(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \geq 0 \\ g_{k+1}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) > 0, \dots, g_t(\mathbf{u}, \mathbf{x}) > 0 \\ h_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \neq 0, \dots, h_m(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

这里， $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ 表示参数， $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ 表示变元， $t \geq k \geq 0, m \geq 0, p_i, g_i, h_i$ 均为多项式。这样的系统定义的点集称为半代数集 (semi-algebraic set) 。

★ 半代数系统的求解一直是数学中基本问题之一，大量的理论与应用问题可归结为半代数系统的求解问题，同时其与自动推理、机器证明有着紧密的联系。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 12 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

3 数学机械化方法在控制理论中的若干应用

- 系统鲁棒严格正实域的刻画
- 时滞系统全时滞稳定的代数判据
- 线性系统的同时镇定问题
- 一类积分不等式的机器判定
- 常用基本不等式的机器证明
- 其它相关结果

访问主页

标题页



第 13 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

3.1. 系统鲁棒严格正实域的刻画

- 引入弱严格正实域的概念，讨论了弱严格正实域的性质，利用多项式完全判别系统，给出系数空间中传递函数鲁棒严格正实域和弱严格正实域的完整刻划，解决了Huang和Hollot等人1990年提出的公开问题，并提出一种新的切实可行的系统鲁棒严格正实综合设计方法。合作论文发表于《中国科学》（2000）。

访问主页

标题页



第 14 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



3.2. 时滞系统全时滞稳定的代数判据

- 首先讨论了一类形式较为一般的任意维线性多时滞滞后型微分系统的全时滞稳定性问题。利用杨路等人新近建立的多项式完全判别系统，给出该系统全时滞稳定的代数判别准则。特别地，可在几种特殊情况下该系统全时滞稳定的显式代数判据。推广了文献中的已有结果。同时指出张作元《科学通报》（1986）文中一个引理的错误，导致其得到的条件仅是充分的而非必要的。
- 将多项式完全判别系统应用于中立型时滞微分系统全时滞稳定的判定，得到了中立型时滞微分系统便于应用的代数判据；当系统非全时滞稳定时，可进一步得到使系统稳定的时滞界限。
- 相关研究结果已正式发表于《Systems & Control Letters》（2008）、CCC2000、CDC2001、YAC2004等。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 15 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



3.3. 线性系统的同时镇定问题

- 利用复分析理论，结合Blondel的方法，对著名的广义香槟问题给出理论上的解答，完整地回答了Patel等人提出的公开问题，自然包含原香槟问题的解。同时，结合杨路等人新近发展的不等式型定理机器证明理论，给出了控制器的设计方法，得到的数值算例明显改进了已有文献中的结果。
- 借助不等式型定理机器证明的理论与方法，针对比利时巧克力问题，系统地给出了低阶双稳定镇定控制器存在条件下参数的取值上界，并提出了针对此上界分布的两个猜想。通过对所得可镇定条件引入适当的扰动，得到的四阶控制器数值算例改进了已有文献中的结果。
- 相关研究结果已正式发表于《中国科学》（2007）。其它相关论文见IFAC2008和CCC2007等。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 16 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

3.4. 一类积分不等式的机器判定

- 将一类齐次积分不等式转化为Tarksi模型外的齐次对称多项式不等式，该类齐次对称多项式的次数是给定，变元个数可以是任意多个，并且多项式的系数不是常系数，而是具有与变元个数相关的变系数。这些特点与杨路等人最近提出的几个公开问题密切相关，是比较有代表性的一类齐次对称多项式，然后利用Timofte对称多项式的降维理论，结合不等式证明软件BOTTEMA及差分代换方法，给出此类Tarksi模型外的齐次对称多项式不等式的机器证明算法，从而实现原积分不等式的机器证明，部分地回答了杨路等人提出的公开问题。当给定的积分不等式或齐次对称多项式不等式不成立时，可给出具体不成立的数值反例。应用例子表明问题的广泛性及算法的有效性。
- 相关研究结果已正式发表于《中国科学》（2010）。

访问主页

标题页



第 17 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

3.5. 常用基本不等式的机器证明

- 结合不等式证明软件BOTTEMA，给出几类常用基本不等式的机器证明方法，包括算术、几何与调和平均不等式，排序不等式，Chebyshev不等式，Bernoulli不等式，三角不等式及Jensen不等式等，这些不等式通常含有的变元个数可以是任意多个，属于Tarski模型外的不等式类型，充分体现机器证明的优点。机器证明方法得出的结论有可能推广已知的不等式，其方法本身对同类不等式有示范性。大量例子表明问题的广泛性及软件算法的有效性。
- 相关研究结果已正式发表于《智能系统学报》（2011）。

访问主页

标题页



第 18 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

3.6. 其它相关结果

- 多项式族的振动性分析。

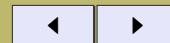
- ★ 将多项式完全判别系统引入多项式振动性的分析，并给出区间多项式族和菱形多项式族鲁棒振动稳定性的顶点检验结果，相关工作见《International Journal of Systems Science》（2007）及CDC2001等。

- 一类积分方程正解个数的判定。

- ★ 利用多项式完全判别系统，给出了一类积分方程恰好存在 n 个正解的充分必要条件，推广了Yao (J. Math. Phys., 1991) 的一个结果，论文发表于《Control and Cybernetics》（2003）。

访问主页

标题页



第 19 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



- 一个三角不等式猜想的证明。

★ 在1999年吴文俊先生八十华诞学术报告会上，杨路教授提出了一个15次三角函数在一定约束下的全局最大值的公开问题，该问题由于阶次太高，富有挑战性（见杨路，全局优化的符号算法与有限核原理，“数学与数学机械化（林东岱，李文林，虞言林主编）”，山东教育出版社，济南，210-220, 2001. 亦见L. Yang, Recent advances in automated theorem proving on inequalities, Journal of Computer Science and Technology, 14(5): 434-446, 1999.），最近，我们用几何不等式软件Bottema彻底给出了该问题的精确解答，并且，处理的阶次还可以进一步提高。见郁文生、何冠男与杨路的通信（2007/2/16）。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 20 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



- 一个Tarski模型外的不等式证明问题。

★ 下面的问题是2008年10月29日杨路教授在“中国不等式研究”网曾提出的一个Tarski模型外的不等式证明的猜想，见<http://www.irgoc.org/bbs/dispbbs.asp?boardid=4&Id=3335&page=6>，该问题很有代表性，对认识差分代换方法的本质会有帮助，我们给出了其正面的答案。见郁文生与杨路的通信（2009/7/5）。

问题： 设 $a, b, c \geq 0$. 求证对一切自然数 k 有不等式：

$$\sum a^{2k+4} + 35abc \sum a^k b^{k+1} \geq 36abc \sum a^{k+1} b^k.$$

这里，符号 \sum 是指对非负变量 a, b, c 的循环求和。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 21 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



- 正系统理论与应用。
- 平面曲线的拓扑结构。曲面连接问题。
- 机器人行动规划。机器臂工作空间，搬钢琴问题。
- 键合多项式的正分解问题。。
- 摄像机标定中的P3P问题。
- 特定消谐脉宽调制开关角度的实解个数。
- 生物系统稳定性的代数分析。
- 混成系统的可达性。
- 程序可靠性验证问题。
- 等等，等等.....。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 22 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



4 控制理论的机械化

- 控制理论作为一门具有广泛应用价值的技术学科，在过去的二十世纪中取得了令人瞩目的成果。无论是以频率响应方法和根轨迹方法为核心的古典控制理论，还是以线性系统状态空间理论、最优控制理论以及系统辨识理论为核心的现代控制理论都对人类社会的发展进步产生了巨大的推动作用。
- 控制理论中的很多问题本质上都可以转化为一组代数方程和代数不等式的求解问题。
- 我国在由吴文俊院士开创的数学机械化领域的研究在国际上是领先的，数学机械化的理论和算法取得的最新结果为控制理论的机械化研究提供了很好的契机。
- 应用数学机械化方法解决相关高科技领域的关键基础理论问题也是吴文俊院士“数学机械化纲领”的重要组成部分。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 23 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



- 控制理论的机械化构架。
- 全局最优化算法的实现。
- 非Tarski模型命题的机械化证明尝试。
- 相关应用软件的开发。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 24 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

4.1. 控制理论的机械化构架

- 目标：建立一个集群计算平台，利用新近发展的定理机器自动证明与自动发现理论，对控制理论中的一批基本命题给出机械化证明的构架与尝试。
- 借助数学机械化软件平台（MMP, Discoverer, Bottema等），提出并完成一套针对控制理论中的若干定理，能够实现定理自动验证、自动发现甚至部分或全部证明步骤可读的软件包，从而在一定程度上实现控制理论的机械化。

访问主页

标题页



第 25 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

4.2. 全局最优化算法的实现

- 目标：结合符号计算与数值计算，给出针对一批控制问题可靠实用的全局优化算法。
- 全局优化问题是控制理论与工程领域中的核心问题。有效地利用几何不等式软件对解决全局优化问题具有强大威力。有效地结合符号与数值计算，应用大规模集群并行计算平台，给出一套针对控制问题可靠实用的全局优化算法。

访问主页

标题页



第 26 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



4.3. 非Tarski模型命题的机械化证明尝试

- 目标：对控制理论中几类非塔尔斯基（Tarski）模型命题进行机械化证明尝试。
- 控制理论及数学其它领域问题中出现的 n 不等式有时可能会依赖于一个（甚至多个）离散参数 n ，它是一个不确定的自然数，譬如所考虑的不等式中的变量个数不确定以及用传统数学归纳法证明的命题，这类问题已经超出了Tarski的判定算法所能处理的“初等”范围，但是这类问题并不等于不能转化为Tarski的判定算法所能处理的“初等”类型。
- 有效地实现数学归纳法的机械化，针对控制理论研究中的其他类型非Tarski模型命题的机械化研究具有十分重要的意义。

引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

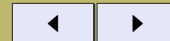
结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 27 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

4.4. 相关应用软件的开发

- 目标：将数学机械化的理念引入控制理论的研究，结合控制理论的特点，改进算法，开发软件，在一些控制工程中实现应用。
- 最后指出，当问题参数较多、维数较高时，计算复杂度增长很快，依然是控制理论机械化的瓶颈问题。如何提高效率，使之方便地应用于大规模工程优化问题，是长期值得探讨的研究课题。数值与符号运算的结合以及大规模并行运算处理，可能是提高其效率的有效途径。

访问主页

标题页



第 28 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

5 两个open不等式问题

- Vasc猜想（杨路，夏壁灿，2008；杨学枝，2009）
- Mordell不等式（林开亮，2011）

访问主页

标题页



第 29 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

5.1. Vasc猜想（杨路，夏壁灿，2008；杨学枝，2009）

- **问题1：Vasc不等式** 设 $a, b, c \geq 0$. 求证对一切自然数 k 有不等式：

$$\sum \frac{a-b}{b+c} \geq 0.$$

这里，符号 \sum 是指对非负变量 a, b, c 的循环求和。

- **问题1'：杨学枝猜想13** 设 $a, b, c \geq 0$. 求证对一切自然数 k 有不等式：

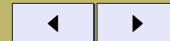
$$\sum \frac{a}{b+c} \geq \sum \frac{a+b}{2(b+c)}.$$

这里，符号 \sum 是指对非负变量 a, b, c 的循环求和。

- 杨学枝猜想13可以看成是Vasc不等式的变形。

访问主页

标题页



第 30 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

● 已有结论和较简单的反例如下:

- ★ 当 $n \leq 5$ 及 $n = 7$ 时, 用差分代换方法已验证结论成立;
- ★ 当 $n = 6$ 时, 反例 $[84, 7, 79, 5, 76, 1]$, 还可构造较简单的反例 $[14, 0, 15, 0, 16, 2]$ 及 $[30, 0, 31, 0, 33, 3]$ 等;
- ★ 当 $n = 8$ 时, 较简单的反例 $[14, 0, 15, 0, 16, 2, 13, 0]$ 及 $[89, 0, 88, 0, 91, 0, 94, 4]$ 等;
- ★ 当 n 为大于 $k(k \geq 6)$ 的偶数时, 可在 k 个变量反例的基础上在加上 m 对 $a_{k+(2m-1)} = a_{k-1}, a_{k+2m} = a_k, (m = 1, 2, \dots)$ 即可;

访问主页

标题页



第 31 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

● 已有结论和较简单的反例如下:

- ★ 当 $n = 13$ 时, 可构造较简单的反例 $[\frac{30}{51}, \frac{40}{51}, \frac{10}{51}, \frac{40}{51}, 0, 1, 0, \frac{80}{51}, 0, 2, 1, 1, 1]$ 等;
- ★ 当 $n > 13$ 时, 可在上面13个变量反例的基础上在加上 m 个 $a_{13+m} = 1, (m = 1, 2, \dots)$ 即可;
- ★ 目前对Vasc不等式只剩 $n = 9$ 和 $n = 11$ 两种情况未能验证(倾向于结论是正面的!), 另外, 若对 $n = 9$ 有反例, 自然就有 $n = 11$ 的反例, 若对 $n = 11$ 有不等式成立, 自然对 $n = 9$ 的不等式结论也成立;
- ★ 若要求Vasc不等式或杨学枝猜想13中的变量严格为正的, 根据多项式根与系数的连续依赖性, 只需将上述诸多值为0的变量改为足够小的正数即可。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 32 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

5.2. Mordell不等式（林开亮，2011）

- **问题：** 1958年Birch提出以下猜想，设复数 z_1, \dots, z_n 满足

$$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = n$$

则

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2$$

在单位圆的内接正 n 边形的顶点 z_1, \dots, z_n 取得最大值 n^n 。

- 在1960年，Mordell对 $n = 3$ 肯定了猜想成立，J. H. H. Chalk对 $n \geq 6$ 否定了猜想，他给出的反例是 $z_1 = 0$ 而 z_2, \dots, z_{n-1} 构成半径为 $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ 的圆的内接正 $n - 1$ 边形的顶点，对这些 z_i 容易算出 $\Delta = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n - 1)^{n-1}$ ，当 $n \geq 6$ 时它比 n^n 大。唯独留下 $n = 4, 5$ 的情形没有解决。

访问主页

标题页



第 33 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- **定理1(Mordell 1960)** 设复数 z_1, z_2, z_3 满足

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 3$$

则

$$\Delta = |z_1 - z_2|^2 |z_2 - z_3|^2 |z_3 - z_1|^2 \leq 3^3 = 27$$

等号成立当且仅当 z_1, z_2, z_3 为内接于单位圆的正三角形的三个顶点。

- **定理2(林开亮2011)** 设复数 z_1, z_2, z_3, z_4 满足

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 4$$

则

$$\Delta = |z_1 - z_2|^2 |z_2 - z_3|^2 |z_3 - z_4|^2 |z_4 - z_1|^2 \leq 4^4 = 256$$

等号成立当且仅当 z_1, z_2, z_3, z_4 为内接于单位圆的正方形的四个顶点。

- 目前, 上述Mordell不等式猜想只剩 $n = 5$ 的情形没有解决!

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 34 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

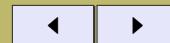
参考文献

6 结束语

- ★ 学科交叉，发挥优势，争取在控制理论的机械化方面的某些研究问题上实现突破！

访问主页

标题页



第 35 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

7 致谢

- 感谢与王龙教授、杨路教授、夏壁灿教授、曾振柄教授及关强博士、何冠男博士、杨克虎博士、袁如意博士和李望博士等的多次讨论与愉快合作！
- 感谢四川大学数学学院陈柏辉教授和朱允民教授的盛情邀请！
- 感谢四川大学数学学院的各位老师和同学们！
- 感谢国家自然科学基金资助。

访问主页

标题页



第 36 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出

谢谢大家!



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 37 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出

8 参考文献

References

- [1] L. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [2] B. Anderson, N. Bose, and E. Jury, *IEEE Transactions Automatic Control*, 20(1): 53-66, 1975.
- [3] D. S. Arnon, G. E. Collins, and S. McCallum, *SIAM Journal on Computing*, 13(4): 865-877, 1984.
- [4] D. S. Arnon, G. E. Collins, and S. McCallum, *SIAM Journal on Computing*, 13(4): 878-889, 1984.
- [5] V. Blondel, *Simultaneous Stabilization of Linear Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences 191)*, Springer-Verlag, London, 1994.
- [6] G. E. Collins, *Automata Theory and Formal Languages (H. Brahage ed.)*, LNCS 33: 134-165, Springer, 1975.
- [7] G. E. Collins and H. Hong, *Journal of Symbolic Computation*, 12(3): 299-328, 1991.



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

访问主页

标题页



第 38 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展
数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

[8] 高小山, 王定康, 裘宗燕, 杨宏, 方程求解与机器证明(数学机械化丛书), 科学出版社, 北京, 2006.

[9] S. Gerhold and M. Kauers, *Proc.ISSAC' 05*, 156-162, 2005.

[10] S. Gerhold and M. Kauers, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(2): Article 42, 2006.

[11] N. Gu, W. S. Yu, Y. Xiong, and M. Tan, *International Journal of System Science*, 38(2): 179-185, 2007.

[12] 关强, 何冠男, 王龙, 郁文生, 控制理论与应用, 28(1):1-12, 2011.

[13] 关强, 王龙, 夏壁灿, 杨路, 郁文生, 曾振柄, 中国科学, E-37(6): 770-780, 2007.

[14] 郭雷, 程代展, 冯德兴, 控制理论导论, 科学出版社, 北京, 2005.

[15] G. He, L. Wang, B. Xia, and W. S. Yu, *Proc. CCC' 07*, vol.3: 88-92, 2007.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 39 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- [16] G. He, L. Wang, W. S. Yu, *Proc. IFAC 17th World Congress*, 2008.
- [17] 黄琳, 稳定性与鲁棒性的理论基础, 科学出版社, 北京, 2003.
- [18] E. L. Kaltofen, B. Li, Z. Yang, L. Zhi, *Journal of Symbolic Computation*, (Accepted), 2012.
- [19] M. Kauers, *Proc.ISSAC' 04*, 199-204, 2004.
- [20] 林东岱, 李文林, 虞言林, 数学与数学机械化, 山东教育出版社, 济南, 2001.
- [21] 林开亮, 数学传播, 35(2): 51-58, 2011.
- [22] H. Shi, *MM Preprints*, 5: 56-65, 1990.
- [23] 《数学辞海》, 中国科学技术出版社, 北京, 东南大学出版社, 南京, 山西教育出版社, 太原, 2002.
- [24] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. The University of California Press, Berkeley, 1951.

访问主页

标题页



第 40 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- [25] 王东明, 符号计算选讲, 清华大学出版社, 北京, 2003.
- [26] 王东明, 夏壁灿, 计算机代数, 清华大学出版社, 北京, 2004.
- [27] 王龙, 郁文生, 中国科学, E-29(6): 532-545, 1999.
- [28] L. Wang, W. S. Yu, and L. Zhang, *Control and Cybernetics*, 32(2): 383-395, 2003.
- [29] P. Wei, Q. Guan, W. S. Yu, and L. Wang, *Systems & Control Letters*, 57(2): 165-174, 2008.
- [30] 吴文俊, 中国科学, (6): 507-516, 1977.
- [31] 吴文俊, 几何定理机器证明的基本原理, 科学出版社, 北京, 1984.
- [32] 吴文俊, 自然科学进展, (1): 1-14, 1992.

访问主页

标题页



第 41 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- [33] 吴文俊, 系统科学与数学, 7(2): 193-200, 1994.
- [34] 吴文俊, 数学机械化(数学机械化丛书), 科学出版社, 北京, 2003.
- [35] 吴文俊, 科技与出版, (1): 29-30, 2005.
- [36] K. Yang, S. Fu, H. Hu, R. Yuan, and W. S. Yu, *Proc. ICIP 2010*, 446-450, 2010.
- [37] 杨克虎, 袁如意, 项勇, 郁文生, 中国矿业大学学报, 40(5): 766-773, 2011.
- [38] 杨路, 高技术通讯, 8(7): 20-25, 1998.
- [39] L. Yang, *Journal of Computer Science and Technology*, 14(5): 434-446, 1999.
- [40] 杨路, 广州大学学报(综合版), 15(2): 7-10, 45, 2001.

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 42 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个 $open$ 不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- [41] 杨路, 广州大学学报(自然科学版), 3(2): 97-106, 179, 2004.
- [42] 杨路, 广州大学学报(自然科学版), 5(2): 1-7, 2006.
- [43] L. Yang, *Proc.ADG' 08*, 143-253, 2008.
- [44] 杨学枝, 数学奥林匹克不等式研究, 哈尔滨工业大学出版社, 哈尔滨, 2009.
- [45] 杨路, 侯晓荣, 夏壁灿, 中国科学, E-31(3): 273-288, 2001.
- [46] 杨路, 侯晓荣, 曾振柄, 中国科学, E-26(5): 424-441, 1996.
- [47] 杨路, 姚勇, 系统科学与数学, 29(9): 1169-1177, 2009.
- [48] 杨路, 姚勇, 冯勇, 中国科学, A-37(5): 513-522, 2007.
- [49] 杨路, 郁文生, 智能系统学报, 6(5): 377-390, 2011.

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 43 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

[50] 杨路, 郁文生, 袁如意, 中国科学, E-41(1): 48-65, 2011.

[51] L. Yang, B. Xia, *Proc. A3L 2005*, 281-289, 2005.

[52] 杨路, 夏壁灿, 不等式机器证明与自动发现(数学机械化丛书), 科学出版社, 北京, 2008.

[53] 杨路, 夏时洪, 计算机学报, 26(7): 769-778, 2003.

[54] 杨路, 张景中, 侯晓荣, 非线性代数方程组与机器证明(非线性科学丛书), 上海科技教育出版社, 上海, 1996.

[55] 姚勇, 中国科学, A-40(3): 251-264, 2010.

[56] 郁文生与杨路的通信, 2005/8/18.

[57] 郁文生与杨路的通信, 2009/7/5.

访问主页

标题页



第 44 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出



引言

数学机械化的研究与进展

数学机械化方法在控制...

控制理论的机械化

两个open不等式问题

结束语

致谢

参考文献

- [58] 郁文生、何冠男与杨路的通信, 2007/2/16.
- [59] 张景中, 科学通报, 42(21): 2248-2259, 1997.
- [60] 张景中, 大自然探索, 16(1): 6-9, 1997.
- [61] 张景中, 中国科学院院刊, (2): 88-92, 1997.
- [62] 张景中, 系统科学与数学, 29(9): 1155-1168, 2009.
- [63] 张景中, 冯勇, 中国科学, A-37(7): 809-816, 2007.
- [64] 张景中, 杨路, 高小山, 周咸青, 计算机学报, 18(5): 380-393, 1995.

访问主页

标题页



第 45 页 共 45 页

返回

全屏显示

关闭

退出